RELACIONES DE ORDEN, REDES Y ALGEBRAS DE BOOLE

I. RELACIONES DE ORDEN

1. En A = {a,b,c,d,e} se definen las siguientes relaciones:
(recordar que ΔA={(x,x) / x ϵ A}

R = ΔA U {(a,b),(a,c),(a,e),(b,c),(b,e),(d,c),(d,e)}

S = ΔA U {(e,a),(e,b),(e,d),(a,b),(b,d),(c,d)}

T = ΔA U {(c,d),(b,c),(a,e),(d,e),(b,e),(b,a)}

Y = ΔA U {(a,c),(d,a),(d,c),(b,a),(b,d),(b,c),(e,c),(e,a),(e,d),(e,b)}

a) Analice si cada una de las relaciones es de orden. Justificar.

b) Para las que sean de orden, haga el diagrama de Hasse, indique si es de orden parcial o total, y halle la relación inversa y analice si es de orden

2. Dada la matriz $M_{(R)}$, indique, justificando, si la relación R es de orden

$$M_{(R)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Demuestre que las siguientes son relaciones de orden en los conjuntos indicados:

a) En ℕ (naturales): a R b ⇔ a | b

b) En ℤ (enteros): a R b ⇔ ∃ c ϵ N_0 : b = a + c

c) En ℝ (reales): a R b ⇔ a ≥ b

d) En ℘ (A) (partes de A): X R Y ⇔ X ∩ Y = X

4. Indique V o F (justificando): Si R y S son relaciones de orden en A, entonces:

a) R^{-1} es de orden en A

b) R ∩ S es de orden en A

c) R U S es de orden en A

d) Si R ⊆ S ^ S es de orden total => R es de orden total

e) Si R ⊆ S ^ S es de orden parcial => R es de orden parcial

5. Sean (A; $\preccurlyeq_1$) y (B; $\preccurlyeq_2$) dos subconjuntos ordenados. Sea AXB el producto cartesiano donde se define la siguiente relación: (x,y) R (z,t) ⇔ x $\preccurlyeq_1$ z ^ y $\preccurlyeq_2$ t

a) Demuestre que R es relación de orden

b) Si (A; $\preccurlyeq_1$) y (B; $\preccurlyeq_2$) son totalmente ordenados, ¿es (AXB, R) orden total también?

c) Considere A = { 0 , 1 } con la relación: $\preccurlyeq_1$ = { (0,0) , (0,1) , (1,1) } y B = { a , b , c } con $\preccurlyeq_2$ = { (a,a) , (a,b) , (a,c) , (b,b) , (b,c) , (c,c)}, haga el diagrama de Hasse de la relación R del producto cartesiano.

6. Sea la relación R definida en el conjunto de funciones tal que f R g ⇔ f(0) ≥ g(0)
   a) Analice si R es d orden en el conjunto de todas las funciones. Justifique o demuestre.
   b) Considere que B = { f(x) = x^2 , g(x) = cos(x) , h(x) = $6e^x$, m(x) = 2x – 3 , s(x) = |x| +4 } Haga el diagrama de Hasse de (B,R) e indique si es totalmente ordenado.
7. Sea R una relación de orden definida en un conjunto A y S una relación de equivalencia definida en el mismo conjunto. Se pide:
   a) Demuestre que la relación R ∩ S es de orden
   b) Considerando A = { 1 , 2 , 3 , 4 } y sabiendo que las relaciones R y S son iguales, escriba la matriz de la relación T = $\bar{R}$
8. En un conjunto de 4 elementos ¿es posible definir 12 relaciones de orden distintas no isomorfas entre sí? Justifique

II. ELEMENTOS NOTABLES

9. Sea el conjunto ordenado (A ={1,2,3,4,5,6,8,9,12} ;|)
   a) Haga el diagrama de Hasse e indique maximales y minimales
   b) Halle C $\subseteq$ A tal que C esté totalmente ordenado
   c) Indique conjunto mayorante y minorante de B = { 2 , 3 , 6 } , supremo e ínfimo de B.¿son máximo y mínimo?
10. Construya un caso, de ser posible, en el conjunto A = {a,b,c,d,e,f,g} una relación de orden a través de un diagrama d Hasse de modo tal que: “c” sea el único minimal, carezca de máximo y “f” sea la única cota superior del subconjunto (a , b , g }
11. Dada la relación definida en $\mathbb{N}^2$: (a,b) R (c,d) ⇔ a | c ^ b ≤ d
   a) Demuestre que R es de orden
   b) Halle cotas superiores, cotas inferiores, supremo e ínfimo del subconjunto X={(4,4),(8,6),(8,5),(4,6),(6,3),(12,9)}
12. En ℘ (A) se define la relación R como: X R Y ⇔ $\bar{X} \cap Y = \emptyset$
   a) Demuestre que la relación es de orden
   b) Siendo A = { 1 , 2 , 3 , 4 }, halle el supremo y el ínfimo del subconjunto B={{1,3},{1,3,4},{3,4}}
13. Sea A = {1,2,3,4,5,6,7,14,20} donde se define la relación: aRb ⇔ (a=b) v (p(a) < p(b)), siendo p(n)=cantidad de letras del nombre de n (por ejemplo: p(3) = 4)
   a) Pruebe que R es una relación de orden y haga el diagrama de Hasse de A
   b) Indique cotas superiores e inferiores, supremo, ínfimo, máximo y mínimo del subconjunto B={4,5,6,7}
14. Sea el conjunto ordenado (ℝ ; ≤) y A = {x / x = $\frac{3n}{n+1}$, con n ϵ ℕ }
   a) Halle algunos elementos del conjunto A. Compruebe que es subconjunto de ℝ

b) Halle cotas superiores e inferiores de A, supremo e ínfimo, e indique si existen máximo y mínimo.

15. Sea el conjunto A = { 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 }. Haga el diagrama de Hasse de una relación de orden S sabiendo que 2 es el primer elemento, las cotas superiores de { 3 , 5 , 6 } son { 5 , 4 }, hay un único maximal y el subconjunto { 1 , 3 , 5 , 6 } es isomorfo a (D_{35} , |). Indique si es de orden total.

16. Indique se las siguientes proposiciones son V o F, justificando:

a) La relación R definida en $\mathbb{Z}$ tal que xRy ⇔ $|x| \leq |y|$ es de orden.

b) Si un conjunto está bien ordenado, entonces está totalmente ordenado.

c) Si un conjunto está totalmente ordenado, entonces está bien ordenado.

d) Si (A; $\preccurlyeq$) es un conjunto finito y totalmente ordenado, entonces cualquier subconjunto tiene mínimo.

e) Si m es minimal del conjunto ordenado (A; $\preccurlyeq$) => m es maximal de (A; $\preccurlyeq^{-1}$)

f) (D_{32} , |) es un conjunto BIEN ordenado.

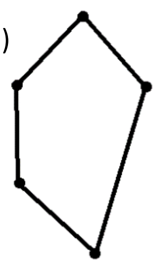
17. Dada la relación S definida en dom(f): xSy ⇔ $f(x) \geq f(y)$

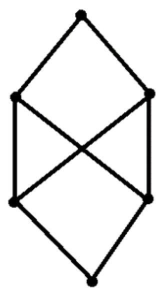
a) Demuestre que si f es cualquier función inyectiva, entonces S es de orden

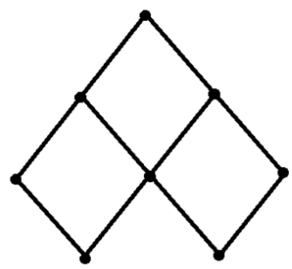
b) Considerando $f(x) = 1/x$, halle las cotas inferiores de x=5

III. REDES

18. Indique cuáles de los siguientes conjuntos finitos ordenados dados por su diagrama de Hasse, es una red. Justifique:

a)


b)


c)


19. Indique cuáles de los siguientes conjuntos ordenados es una red. Justifique:

a) ({1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} ; |)

b) ({1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} ; ≤)

c) (D_{24} ; |)

d) (P({a,b,c}) ; ⊆)({{f_1} , {f_1,f_2} , {f_1,f_3} , {f_1,f_4,f_5} , {f_1,f_6} } ; ⊆)

e) ($\mathbb{N}$; |)

f) ($\mathbb{Z}$; ≥)

20. Para las redes del ejercicio anterior, indique las operaciones que las estructuran como redes algebraicas.

21. Indique Verdadero o Falso, justificando:

a) Todo conjunto ordenado finito con primer y último elemento es red.
b) Toda red es un conjunto totalmente ordenado.
c) Todo conjunto bien ordenado es red.
d) En toda red: x $\preccurlyeq$ y ⇔ sup{x,y} = y

22. En el conjunto de las funciones reales F = { f: Df → If / Df ⊆ ℝ} se define la relación f S g ⇔ $I_f \subseteq I_g$

a) Indique si S es de orden en F, justificando correctamente.
b) Considerando el subconjunto A = { f , g , h , s , t , m } con $f\colon D_f \to I_f\ /\ f(x) = 3x + 2$; $g\colon D_g \to I_g\ /\ g(x) = \frac{1}{x}$; $h\colon D_h \to I_h\ /\ h(x) = x^4 - 5$; $s\colon D_s \to I_s\ /\ s(x) = e^x$; $t\colon D_t \to I_t\ /\ t(x) = \sqrt{7 + 6x - x^2}$; $m\colon D_m \to I_m\ /\ m(x) = arcsen(x - 5)$

Construya el diagrama de Hasse e indique si (A ; S) es red. Justifique.

23. Sabiendo que (A ; + ; ●) es una red algebraica, se pide:

+	1	2	3	4	5	6
1		4	1	4	5	5
2			2	4	5	6
3				4	5	6
4					5	5
5						5
6						

a) Complete la tabla de la operación +, haga el diagrama de Hasse y la tabla de ●.

b) Indique si la red es distributiva y si es complementada. Justifique.

24. Sabiendo que (A ; + ; ●) es una red algebraica, se pide:

+	a	b	d	c	e	f	g	h
a		b	c	d	e	f	g	h
b			e	e	e	h	h	h
c				e	e	h	h	h
d					e	f	g	h
e						h	h	h
f							h	h
g								h
h								

a) Complete la tabla de la operación +, haga el diagrama de Hasse y la tabla de ●.

b) Indique si la red es distributiva y si es complementada. Justifique.

25. Sea la red (A = {a,b,c,d,e,f,g,h} ; + ; ●), siendo:

+	a	b	d	c	e	f	g	h
a		b	c	d	e	f	g	h
b			e	d	e	g	g	h
c				g	e	f	g	h
d					g	g	g	h
e						g	g	h
f							g	h
g								h
h								

a) Complete la tabla de +, haga la de ● y el diagrama de Hasse de la relación de orden.

b) Analice si la red dada es distributiva y complementada. Justifique.

c) Analice si es isomorfa a (D_{30} ; |) . Justifique

IV. ÁLGEBRAS DE BOOLE

26. Analice cuáles de las siguientes redes son Álgebras de Boole:

a) (D_{18} ; ⊆)

b) (D_{18} ; m.c.m. ; m.c.d.)

c) ($\wp(A)$; ∪ ; ∩)

d) ({ Φ , {1} , {2} , {3} , {1,2,3} } ; ⊆)

e) ($\{0,1\}^{nxn}$; ∨ ; ∧)

27. Sea LA Red (D70 ; |)

a) Defina las operaciones binarias que la estructuran como red algebraica.

b) Si (D_{70} ; |) es Álgebra de Boole, indique el conjunto A de los átomos y defina un isomorfismo con ($\wp(A)$; ⊆)

28. Considere la siguiente Álgebra de Boole: ($\wp(A)$; ⊆), siendo A = {1,2,3}. Indique cuáles de los siguientes subconjuntos son subálgebras de Boole de $\wp(A)$

a) { Φ , {2} , {3} , A } b) { Φ , {1} , {2,3} , A } c) { Φ , {1} , {2} , {1,2} }

29. Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones en toda Álgebra de Boole (A ; ∨ ; ∧), demostrando o justificando según corresponda:

a) $\forall x,y,z \in A: x \vee y = x \vee z \Rightarrow y = z$

b) $\forall a,b \in A: a \preccurlyeq b \wedge a \preccurlyeq \bar{b} \Rightarrow a = 0_A$

c) $\forall x,y \in A: (x \wedge y = x \Leftrightarrow x \wedge \bar{y} = 0_A)$

d) $\forall a,b \in A: b \vee \bar{a} = 1_A \Rightarrow a \wedge \left[b \vee \left(\bar{a} \wedge \bar{b}\right)\right] = a$

e) $\forall a,b,c \in A: (a \wedge b) \vee c = a \wedge (b \vee c) \Leftrightarrow c \preccurlyeq a$

f) $\forall x,y \in A: (x \vee y) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y}) = 1_A$

g) Toda Álgebra de Boole es una red totalmente ordenada

h) Puede haber elementos que sean complementos de sí mismos.

i) Si A es Álgebra de Boole, entonces su cardinal es 2^n

j) Si A es una red con un número 2^n de elementos, entonces A es un Álgebra de Boole.

30. En toda Álgebra de Boole (A ; + ; ●), si $a \cdot \bar{b} \preccurlyeq c \wedge a + c = 1_A$ se cumple:

a) $\bar{a} = c$ b) $\bar{c} \preccurlyeq b$ c) $a \preccurlyeq c \wedge \bar{b} \preccurlyeq c$ d) $c = 1_A$

V. FUNCIONES BOOLEANAS

31. Para las siguientes funciones booleanas de {0,1}3 → {0,1}:

$$f(x,y,z) = (\overline{z+y} + \bar{x}) \cdot \bar{z} + y$$
$$g(x,y,z) = x \cdot \overline{z+y} + \bar{x} \cdot \bar{y}$$

Se pide:

a) Construya la tabla de cada una.
b) Escriba a cada una en FND (forma normal disyuntiva) y en FNC (forma normal conjuntiva)
c) Simplifique la expresión de cada una de las funciones.

32. Dada la función booleana $f(x,y,z) = \bar{x} \cdot y \cdot (z+x) + (\overline{z+y} + x) \cdot \bar{z} \cdot y + x \cdot z$:

a) Escriba dicha función en forma normal disyuntiva, utilizando leyes de Álgebra de Boole
b) Diseñe un circuito con la menor cantidad de compuertas para implementar la función dada.

Nota: siempre se deben usar compuertas binarias (de dos entradas) excepto las NOT.

33. Indique Verdadero o Falso, justificando:

a) La FND de la función booleana $f(x,y,z) = x \cdot y + \bar{y}$ consta de 5 minitérminos.

b) La función booleana $f(x,y,z) = (\bar{x} + y + \bar{z}) \cdot \overline{x \cdot \bar{z}}$ puede implementarse con un circuito formado solamente por dos compuertas NAND.

c) La forma normal conjuntiva de $f(x,y,z,w) = (w + \bar{z}) \cdot x + (y + \bar{z})$ tiene 4 maxitérminos.

d) Es posible implementar con una única compuerta la función booleana:

$f(x,y,z) = \overline{x \cdot \bar{y} + z} + \overline{y+z}$

e) La forma normal disyuntiva de la función booleana: $f(x,y,z,t) = x \cdot y \cdot (\overline{z+t} + z)$ tiene cinco minitérminos.

f) La función booleana: $f(x,y,z) = x \cdot z + \bar{y} \cdot \overline{z + \bar{x}}$ puede ser implementada en un circuito formado solamente por una compuerta AND, una OR y una NOT.

34. Se tiene un compuesto para analizar en laboratorios. Si el compuesto tiene sustancia Z debe rechazarse. Si tiene sustancia X, solo se aceptará si también posee sustancia Y. En el resto de los casos no hay problema en aceptarla.

a) Defina una función boolena f(x,y,z) a través de una tabla que detecte los rechazos (debe valer 0 si se rechaza y 1 si se acepta) y escriba la forma normal disyuntiva de f(x,y,z).

b) Simplifique a su mínima expresión y construya el circuito con compuertas AND, OR y NOT.

35. Se tiene una caja con papelitos de un solo color, algunos rojos y otros azules. Cada persona extrae tres papelitos en orden. Para ganar el premio, los tres papelitos deben ser del mismo color o bien el segundo rojo y el tercero azul (sin importar el primero).

a) Represente la situación mediante la tabla de una función booleana que valga 1 cuando gana el premio. (para las entradas, use 0 para rojo y 1 para azul)

b) Simplifique la expresión y diseñe un circuito combinatorio usando solo compuertas NAND.

36. De un grupo de cinco personas: Ana, Beto, Carmen, Daniel y Elba, en la siguiente tabla se muestran los idiomas que habla cada persona:

    a) Arme una función booleana que contemple la necesidad de contar por lo menos con un traductor de cada idioma y arme el circuito usando la menor cantidad de compuertas binarias AND y OR.

    b) Indique la cantidad de maxitérminos que tiene la forma normal conjuntiva (no hace falta anotarlos todos, pero sí explicar cómo los calcula)

37. En una industria colocaron una alarma contra incendios que debe programarse de acuerdo a lo que marquen cuatro sensores A, B, C y D. Si el detector de llamas A está encendido la alarma debe dispararse independientemente de lo que indiquen las demás. Pero si el A está apagado, solamente deberá dispararse la alarma si están encendidos el B y al menos uno de los dos C o D.

    Se pide:

    a) Construya la tabla de la función booleana que modeliza la situación.

    b) Halle la expresión más simple de dicha función booleana.

    c) Diseñe un circuito de compuertas

Guía 5	Relaciones de orden, redes y álgebras de Boole	1 2020/21

I Relaciones de orden

1) En $A = \{a, b, c, d, e\}$ se definen las sig. relaciones R, S, T, Y.

recordar que $\Delta A = \{(x,x) \mid x \in A\}$

a) Analice si cada una de las relaciones es de orden. justificar

b) Para los que sean de orden, haga el diagrama de Hasse, indique si es de orden parcial o total, halle la relación inversa y analice si es de orden

$$R = \Delta A \cup \{(a,b),(a,c),(a,e),(b,c),(b,e),(d,c),(d,e)\}$$

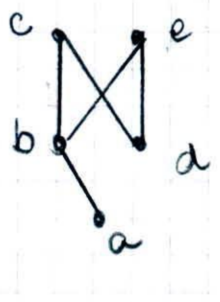
a) • refl $\Rightarrow$ es reflexiva ✓

• antisimétrica: $\left.\begin{array}{l} (a,b)\in R \wedge (b,a)\notin R \\ (a,c)\in R \wedge (c,a)\notin R \\ (a,e)\in R \wedge (e,a)\notin R \\ (b,c)\in R \wedge (c,b)\notin R \\ (b,e)\in R \wedge (e,b)\notin R \\ (d,c)\in R \wedge (c,d)\notin R \\ (d,e)\in R \wedge (e,d)\notin R \\ \Delta A \in R \end{array}\right\}$ R es antisimétrica

• transitiva: $\left.\begin{array}{l} aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc \checkmark \\ \text{para el resto de pares, el antecedente es F} \end{array}\right\}$ R es transitiva

R es una relación de orden

b)



$\boxed{\text{es de orden parcial}}$

$R^{-1} = \{(b,a),(c,a),(e,a),(c,b),(e,b),(c,d),(e,d)\} \cup \Delta A$

R^{-1} es reflexiva (contiene a ΔA)

R^{-1} es antisimétrica (x lo visto en G.4, ej 17b)

• transit: $\left.\begin{array}{l} cR^{-1}b \wedge bR^{-1}a \Rightarrow cR^{-1}a \checkmark \\ eR^{-1}b \wedge bR^{-1}a \Rightarrow eR^{-1}a \checkmark \\ \text{para el resto de los pares, el antecedente es F} \end{array}\right\}$ R^{-1} es transitiva

R^{-1} es reflex, antisim y trans $\Longrightarrow$ $\boxed{R^{-1} \text{ es de orden}}$

$S = \Delta A \cup \{(e,a),(e,b),(e,d),(a,d),(b,d),(c,d)\}$

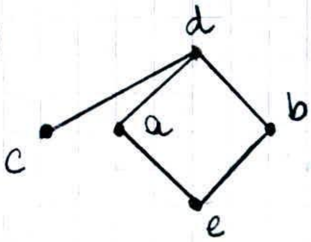
a) • Reflexiva: $\Delta A \subseteq S \therefore \forall x, (x,x) \in S$ ✓

• Antisimétrica:
$(e,a) \in S \wedge (a,e) \notin S$
$(e,b) \in S \wedge (b,e) \notin S$
$(e,d) \in S \wedge (d,e) \notin S$
$(a,d) \in S \wedge (d,a) \notin S$
$(b,d) \in S \wedge (d,b) \notin S$
$(c,d) \in S \wedge (d,c) \notin S$ ✓

• transitiva: $eRa \wedge aRd \Rightarrow eRd$ ✓ ✓
$eRb \wedge bRd \Rightarrow eRd$ ✓

S es una rel. de orden

b)



S es de orden parcial. $S^{-1} = \{(a,e),(b,e),(d,e),(d,a),(d,b),(d,c)\} \cup \Delta A$

S^{-1} es Reflexiva $(\Delta A \in S^{-1})$ ✓
es antisimétrica (guía 4 ej 17a) ✓
es transitiva:
$dS^{-1}a \wedge aS^{-1}e \Rightarrow dS^{-1}e$ ✓
$dS^{-1}b \wedge bS^{-1}e \Rightarrow dS^{-1}e$ ✓ } x ej. G4, ej. 17b si R es trans → R^{-1} es trans.

S^{-1} es de orden

$T = \{(c,d),(b,c),(a,e),(d,e),(b,e),(b,a)\} \cup \Delta A$

a) No es transitiva pues $cTd \wedge dTe$ pero $c \not T e$ → no es de orden

$Y = \Delta A \cup \{(a,c),(d,a),(d,c),(b,a),(b,d),(b,c),(e,c),(e,a),(e,d),(e,b)\}$

• es Reflexiva, pues $\Delta A \subseteq Y$ ✓
• es antisimétrica: $\forall (x,y) \in Y, (y,x) \in Y$ solo si $x=y$ ✓
• es transitiva:
$dYa \wedge aYc \Rightarrow dYc$ ✓
$bYa \wedge aYc \Rightarrow bYc$ ✓
$bYd \wedge dYa \Rightarrow bYa$ ✓
$bYd \wedge dYc \Rightarrow bYc$ ✓
$eYa \wedge aYc \Rightarrow eYc$ ✓
$eYd \wedge dYa \Rightarrow eYa$ ✓
$eYd \wedge dYc \Rightarrow eYc$ ✓
$eYb \wedge bYa \Rightarrow eYa$ ✓
$eYb \wedge bYd \Rightarrow eYd$ ✓
$eYb \wedge bYc \Rightarrow eYc$ ✓

Y es una relación de orden

b)

Y es de orden total

$Y^{-1} = \Delta A \cup \{(c,a),(a,d),(c,d),(a,b),(d,b),(c,b),(c,e),(a,e),(d,e),(b,e)\}$

• Y^{-1} es: reflexiva ✓
G4 x ej. 17a → antisimétrica ✓
x ej. 17b → es transitiva ✓

Y^{-1} es de orden

GUIA 5 — Relaciones de orden

② Dada $M(R)$, indique, justificando, si la relación es de orden

$$M(R) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Es Reflexiva (en la diag ppal hay solo 1) ✓
- Es asimétrica pues en la matriz no hay 1 en simetría (salvo la diag)
- Es transitiva pues $M(R)\,M(R) \leq M(R)$

$$M(R) \cdot M(R) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ ✓

③ Demuestre que las siguientes son relaciones de orden en los conjuntos indicados.

a) En $\mathbb{N}$: $aRb \Leftrightarrow a | b \longrightarrow b = a.k \quad k \in \mathbb{Z}$

- $\forall a \in \mathbb{N}: a|a \xRightarrow{\text{def rel}} aRa \Rightarrow \boxed{\text{es Reflexiva}}$ ✓
- $\forall a,b \in \mathbb{N}: aRb \wedge bRa \xRightarrow{\text{def rel}} b = ak_1 \wedge a = bk_2 \Rightarrow a = b$ $\boxed{\text{es Antisimétrica}}$ ✓
- $\forall a,b,c \in \mathbb{N}: aRb \wedge bRc \xRightarrow{\text{def. rel.}} b = a.k_1 \wedge c = b.k_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow c = (a k_1) k_2 \xRightarrow{\text{asociat.}} c = a \underbrace{(k_1 . k_2)}_{k_3} \Rightarrow c = a k_3 \Rightarrow aRc$ ✓ $\quad k_3 \in \mathbb{Z}$ $\boxed{\text{es transitiva}}$

b) En $\mathbb{Z}$: $aRb \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{N}_0 : b = a + c$

- <u>Reflexividad</u>: $\forall a \in \mathbb{Z}$: si $c = 0 \Rightarrow a = a + 0 \xRightarrow{\text{def rel}} \boxed{aRa}$ ✓
- <u>Antisimetría</u>: $\forall a,b \in \mathbb{Z}: aRb \wedge bRa \xRightarrow{\text{def rela.}} b = a + c_1 \wedge a = b + c_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow b = (b + c_2) + c_1 \xRightarrow{\text{asociativ.}} b = b + (c_2 + c_1) \xRightarrow{c_2 y c_1 \in \mathbb{N}_0} c_1 + c_2 = 0$

$\Rightarrow c_1 = c_2 = 0 \Rightarrow a = b + c_2 \Rightarrow \boxed{a = b}$ ✓

- <u>transitividad</u>: $\forall a,b,d \in \mathbb{Z}: aRb \wedge bRd \xRightarrow{\text{def. rel}} b = a + c_1 \wedge d = b + c_2 \xRightarrow{c_{1,2} \in \mathbb{N}_0}$

$\Rightarrow d = (a + c_1) + c_2 \xrightarrow{\text{asociat}} d = a + \overbrace{(c_1 + c_2)}^{c_3 \in \mathbb{N}_0} \Rightarrow d = a + c_3 \Rightarrow \boxed{aRd}$ ✓

c) En $\mathbb{R}$: $aRb \iff a \geq b$

• Reflexividad: $\forall a \in \mathbb{R}: a \geq a \Longrightarrow \boxed{aRa}$ ✓

• Antisimetría: $\forall a,b \in \mathbb{R}: aRb \wedge bRa \xRightarrow{\text{def. relac.}} a \geq b \wedge b \geq a \Rightarrow$

$\Rightarrow a \geq b \geq a \Rightarrow \boxed{a = b}$ ✓

• transitividad: $\forall a,b,c \in \mathbb{R}: aRb \wedge bRc \xRightarrow{\text{def rel}} a \geq b \wedge b \geq c \Rightarrow$

$\Rightarrow a \geq b \geq c \Rightarrow a \geq c \Rightarrow \boxed{aRc}$ ✓

d) En $\mathcal{P}(A)$: $XRY \iff X \cap Y = X$

• Reflexividad: $\forall X \in \mathcal{P}(A): X \cap X = X \xRightarrow{\text{def rel.}} \boxed{XRX}$ ✓

• Antisimetría: $\forall X,Y \in \mathcal{P}(A): XRY \wedge YRX \xRightarrow{\text{def rel}} X \cap Y = X \wedge Y \cap X = Y$

$\xRightarrow{\text{conmut.}} X \cap Y = X \wedge X \cap Y = Y \Rightarrow \boxed{X = Y}$

• transitividad: $\forall X,Y,Z \in \mathcal{P}(A): XRY \wedge YRZ \xRightarrow{\text{def - relación}}$

$\Rightarrow X \cap Y = X \wedge Y \cap Z = Y \Rightarrow X \cap (Y \cap Z) = X$

$\xRightarrow{\text{asociat.}} (X \cap Y) \cap Z = X \xRightarrow{\triangle} X \cap Z = X \Rightarrow \boxed{XRZ}$ ✓

4) Indique V o F (justificando): Si R y S son relaciones de orden en A, entonces:

a) R^{-1} es de orden en A ; R es refl. $\Rightarrow (a,a) \in R \Rightarrow (a,a) \in R^{-1}$ $\boxed{V}$

• Reflexiva: $\forall a \in A: (a,a) \in R^{-1} \Rightarrow aRa$ ✓ $\boxed{R^{-1} \text{ es reflex}}$

• Simétrica: $\forall a,b \in A: (a,b) \in R^{-1} \wedge (b,a) \in R^{-1} \xRightarrow{\text{rel. inversa}} (b,a) \in R \wedge (a,b) \in R \xRightarrow{\text{conmut.}}$

$\Rightarrow (a,b) \in R \wedge (b,a) \in R \xrightarrow{\text{R es antis.}} a = b \Rightarrow \boxed{R^{-1} \text{ es antis.}}$

• transitividad: $\forall a,b,c \in A: aR^{-1}b \wedge bR^{-1}c \xRightarrow{\text{rel inversa}} bRa \wedge cRb \xRightarrow{\text{conmut.}}$

$\Rightarrow cRb \wedge bRa \xRightarrow{\text{R es transitiva}} cRa \xRightarrow{\text{rel inversa}} aR^{-1}c \Rightarrow \boxed{R^{-1} \text{ es transit.}}$

b) $R \cap S$ es de orden en A $\boxed{V}$

• Reflexiva: $\forall a \in A: \overbrace{(a,a) \in R}^{\text{R es de eq}} \wedge \overbrace{(a,a) \in S}^{\text{S es de equiv} \Rightarrow \text{reflexiva}} \xRightarrow{\text{def} \cap} (a,a) \in (R \cap S) \Rightarrow \boxed{a(R \cap S)a}$ ✓

• Simétrica: $\forall a,b \in A: (a,b) \in R \cap S \wedge (b,a) \in (R \cap S) \xRightarrow{\text{def} \cap} (a,b) \in R \wedge (a,b) \in S \wedge (b,a) \in R \wedge (b,a) \in S$

$\xRightarrow{\text{conmut y asoci.}} [(a,b) \in R \wedge (b,a) \in R] \wedge [(a,b) \in S \wedge (b,a) \in S] \xRightarrow{\text{R y S antis.}} \boxed{a = b}$

• transitiva: $\forall a,b,c \in A: (a,b) \in R \cap S \wedge (b,c) \in (R \cap S) \Rightarrow (a,b) \in R \wedge (a,b) \in S \wedge (b,c) \in R \wedge (b,c) \in S \Rightarrow$

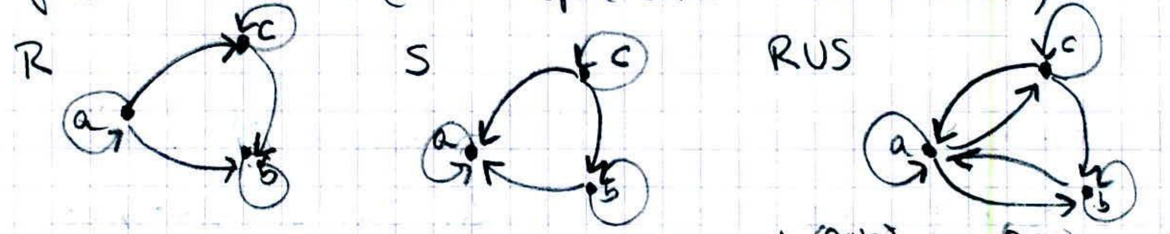
$\overset{\text{conmut y asoc}}{\Longrightarrow} [(a,b) \in R \wedge (b,c) \in R] \wedge [(a,b) \in S \wedge (b,c) \in S] \xrightarrow{R \text{ y } S} \text{son transitivas}$

$\Rightarrow (a,c) \in R \wedge (a,c) \in S \xrightarrow{\text{def } \cap} \boxed{(a,c) \in R \cap S}$ $R \cap S$ es transitiva

c) $R \cup S$ es de orden en A $\boxed{F}$

Visto en la guia 4 ej. 17 e

R y S transitivas (tienen que serlo si es de orden)

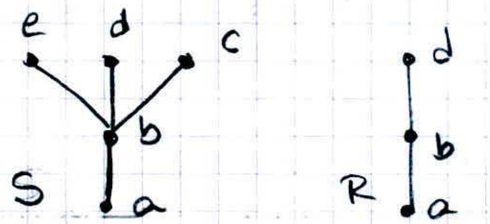


$b (R\cup S) a \wedge a (R\cup S) c$ pero $b \cancel{(R\cup S)} c$

d) Si $R \subseteq S \wedge S$ es de orden total $\Rightarrow R$ es de orden total $\boxed{V}$

$\forall (x,y) \in R \Rightarrow (x,y) \in S$ y S es un conj. ordenado total $x \leq y \vee y \leq x$

e) Si $R \subseteq S$ es de orden parcial $\Rightarrow R$ es de orden parcial $\boxed{F}$



R es de orden total

⑤ Sean $(A; \leq_1)$ y $(B; \leq_2)$ dos conjuntos ordenados. Sea $A \times B$ el producto cartesiano donde se define la relación: $(x,y) R (z,t) \Leftrightarrow x \leq_1 z \wedge y \leq_2 t$

a) Demuestre que R es relación de orden

- $\forall (x,y) \in A \times B : x \in A \wedge y \in B \Rightarrow x \leq_1 x \wedge y \leq_2 y \xrightarrow{\text{def. relación}} (x,y) R (x,y) \rightarrow \boxed{R \text{ es reflexiva}}$
- $\forall (x,y),(z,t) \in A \times B : (x,y) R (z,t) \wedge (z,t) R (x,y) \xrightarrow{\text{def rel}} x \leq_1 z \wedge y \leq_2 t \wedge z \leq_1 x \wedge t \leq_2 y$

$\overset{\text{conmut y asociat}}{\Longrightarrow} (x \leq_1 z \wedge z \leq_1 x) \wedge (y \leq_2 t \wedge t \leq_2 y) \Rightarrow x = z \wedge y = t \Rightarrow (x,y) = (z,t)$

$\boxed{R \text{ es antisimétrica}}$

- $\forall (x,y),(z,t),(u,v) \in A \times B : (x,y) R (z,t) \wedge (z,t) R (u,v) \Rightarrow$

$\overset{\text{def. rel.}}{\Longrightarrow} (x \leq_1 z \wedge y \leq_2 t) \wedge (z \leq_1 u \wedge t \leq_2 v) \Rightarrow$

$\overset{\text{conmut. y asoc.}}{\Longrightarrow} (x \leq_1 z \wedge z \leq_1 u) \wedge (y \leq_2 t \wedge t \leq_2 v) \Rightarrow$

$\Rightarrow (x \leq_1 u) \wedge (y \leq_2 v) \xrightarrow{\text{def Rel}} (x,y) R (u,v) \Rightarrow \boxed{R \text{ es transitiva}}$

$\therefore$ R ES DE ORDEN

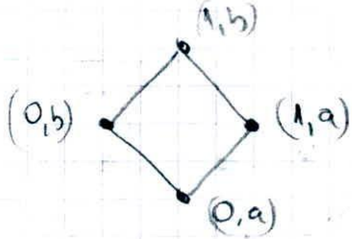
b) Si $(A; \preccurlyeq_1)$ y $(B; \preccurlyeq_2)$ son totalmente ordenados, es $(A \times B; R)$ orden total también?

Puede no serlo

$A = \{0,1\} \rightarrow \preccurlyeq_1 = \{(0,0),(0,1),(1,1)\} \rightarrow$ 

$B = \{a,b\} \rightarrow \preccurlyeq_2 = \{(a,a),(a,b),(b,b)\} \rightarrow$ 

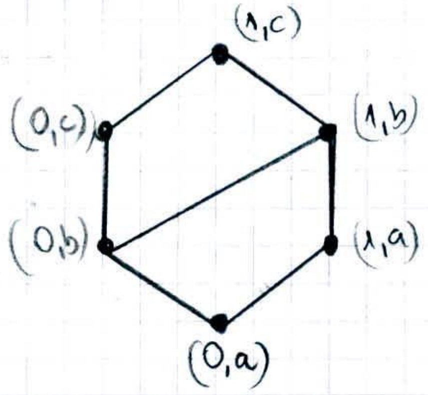
$A \times B = \{(0,a),(0,b),(1,a),(1,b)\}$



c) Considerar: $A = \{0,1\}$ con la relación: $\preccurlyeq_1 = \{(0,0),(0,1),(1,1)\}$

y $B = \{a,b,c\}$ con la relación $\preccurlyeq_2 = \{(a,a),(a,b),(a,c),(b,b),(b,c),(c,c)\}$

hacer el diagrama de Hasse de la relación R del producto cartesiano



---

⑥ Sea la relación R definida en el conj. de funciones tal que:

$$f \, R \, g \Leftrightarrow f(0) \geq g(0)$$

a) Analizar si R es de orden en el conj. de todas las funciones.

No lo es. $f(x) = 3x \quad g(x) = x \rightarrow f(0) = 0 \quad g(0) = 0$

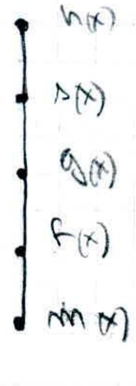
$f(0) \geq g(0) \wedge g(0) \geq f(0)$ pero $f(x) \neq g(x)$

b) Considere $B = \{f(x) = x^2, g(x) = \cos(x), h(x) = 6e^x, m(x) = 2x-3, s(x) = |x|+4\}$

Hacer el diagrama de Hasse de (B, R) e indicar si es totalmente ordenado

$f(0) = 0, \; g(0) = 1, \; h(0) = 6, \; m(0) = -3, \; s(0) = 4$

$h(0) \geq s(0) \geq g(0) \geq f(0) \geq m(0)$



Guia 5

(1) Sea R una relación de orden definida en un conjunto A y S una relación de equivalencia definida en el mismo conjunto. Se pide:

a) Demostrar que la relación $R \cap S$ es de orden

R es de orden $\Rightarrow$ R es reflexiva, antisimétrica y transitiva
aRa
S es de equiv. $\Rightarrow$ S es reflexiva, simétrica y transitiva

- $\forall a \in A: (a,a) \in R \wedge (a,a) \in S \xRightarrow{def\ \cap} (a,a) \in (R \cap S) \Longrightarrow \boxed{R \cap S \text{ es Reflexiva}}$
- $\forall a,b \in A: (a,b) \in R \cap S \wedge (b,a) \in R \cap S \xRightarrow{def\ \cap}$

$\Rightarrow (a,b) \in R \wedge (a,b) \in S \wedge (b,a) \in R \wedge (b,a) \in S \xRightarrow{\text{conmut. y asoc.}}$

$\Rightarrow [(a,b) \in R \wedge (b,a) \in R] \wedge [(a,b) \in S \wedge (b,a) \in S] \xRightarrow{\text{simplificación}}$

$\Rightarrow (a,b) \in R \wedge (b,a) \in R \xRightarrow{R\ \text{antis.}} \boxed{a=b} \Rightarrow \boxed{R \cap S \text{ es antisimétrica}}$

- $\forall a,b,c \in A: (a,b) \in (R \cap S) \wedge (b,c) \in (R \cap S) \xRightarrow{def.\ \cap}$

$\Rightarrow (a,b) \in R \wedge (a,b) \in S \wedge (b,c) \in R \wedge (b,c) \in S \xRightarrow{\text{conmut y asoc.}}$

$\Rightarrow [(a,b) \in R \wedge (b,c) \in R] \wedge [(a,b) \in S \wedge (b,c) \in S] \xRightarrow{} R \text{ y } S \text{ transitivas}$

$\Rightarrow (a,c) \in R \wedge (a,c) \in S \xRightarrow{def\ \cap} (a,c) \in R \cap S$

$\Rightarrow \boxed{R \cap S \text{ es transitiva}}$

$R \cap S$ es Reflexiva, antisimétrica y transitiva $\Rightarrow$ $R \cap S$ es de orden

b) Considerando $A = \{1,2,3,4\}$ y sabiendo que las relaciones R y S son iguales, escribir la matriz de la relación $T = \overline{R}$

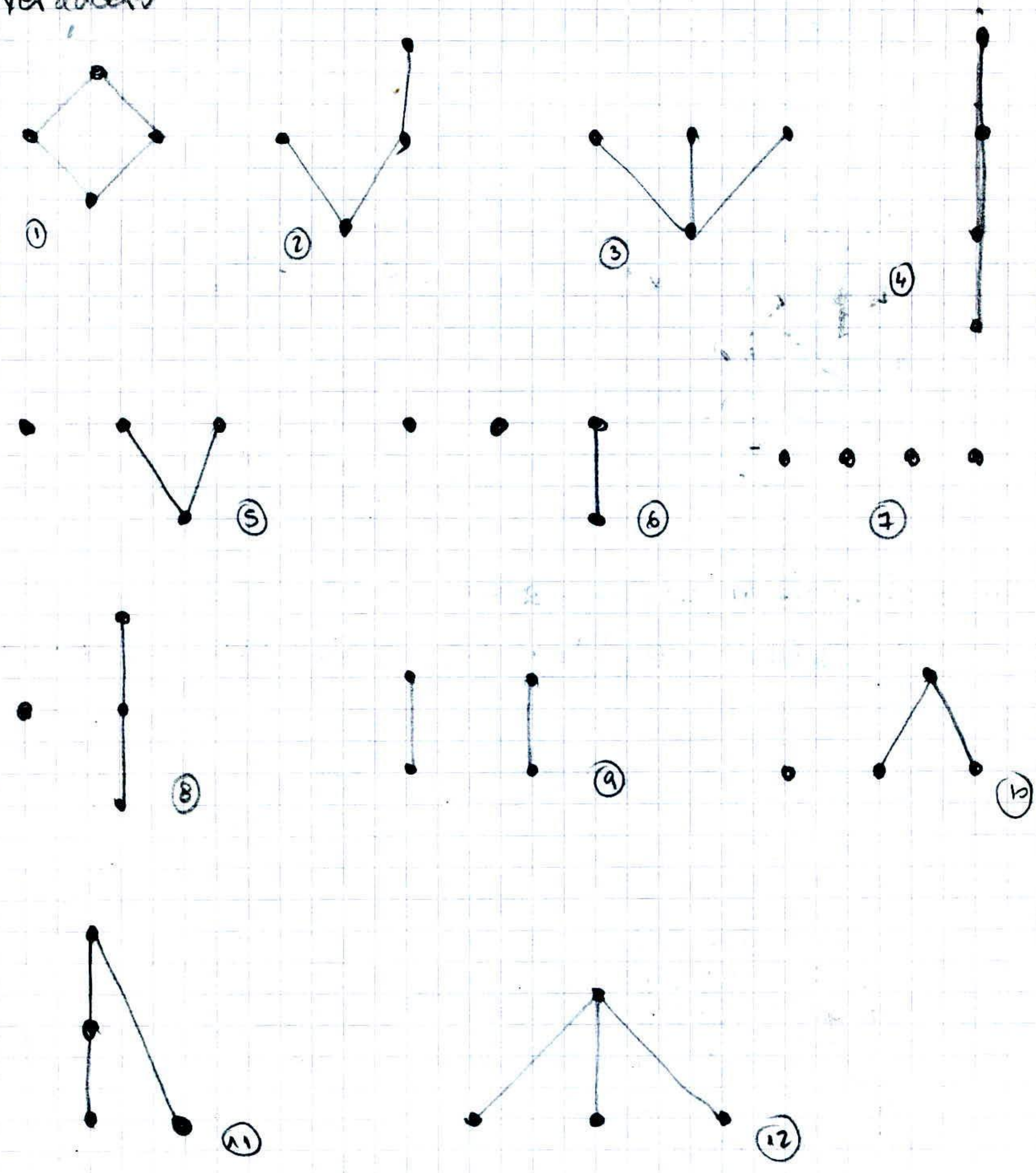
R es reflexiva, antisimétrica y transitiva
S es reflexiva, simétrica y transitiva

Si R y S son iguales, entonces ambas son reflexivas, antisimétricas, simétricas y transitivas
Para que una relación sea simétrica y antisimétrica al mismo tiempo, tiene que tener solo los elementos aislados o que estén relacionados con sí mismos.
Como, además, es reflexiva $\Rightarrow$ todos los elementos se relacionan con sí mismo $\Rightarrow$ matriz identidad

$$M_{(R)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{T = \overline{R}} M_{(T)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(8) En un conjunto de 4 elementos ¿es posible definir 12 relaciones de orden distintas no isomorfas entre sí? Justifique

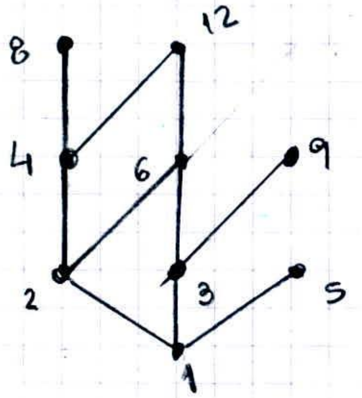
Verdadero



II) ELEMENTOS NOTABLES

(1) Sea el conjunto ordenado $(A=\{1,2,3,4,5,6,8,9,12\}, \mid)$

a) Haga el diagrama de Hasse e indique maximales y minimales



Minimales = 1

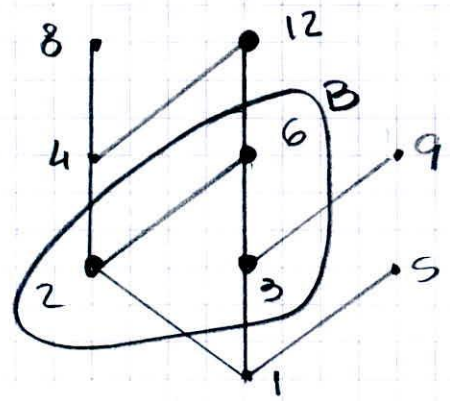
Maximales = 5, 8, 9, 12

b) Halle $C \subseteq A$ tal que esté totalmente ordenado

Hay muchos. Voy a escribir algunos

$C_1 = \{1,2,4,8\}$ $C_2 = \{1,3,6,12\}$ $C_3 = \{1,5\}$ $C_4 = \{2,4,12\}$

c) Indique conjunto mayorante y minorante de $B=\{2,3,6\}$, supremo e ínfimo de B ¿son máximo y mínimo?



Mayorante de B = $\{6,12\}$ Supremo de B = 6 Máximo de B = 6

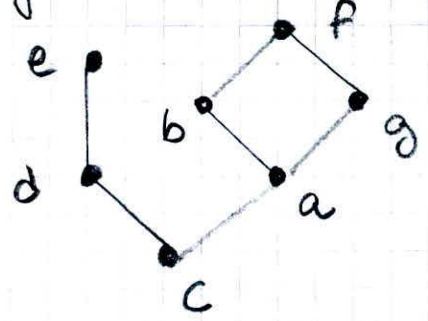
Minorante de B = $\{1\}$ Infimo de B = 1 Mínimo de B = $\nexists$ pues $1 \notin B$

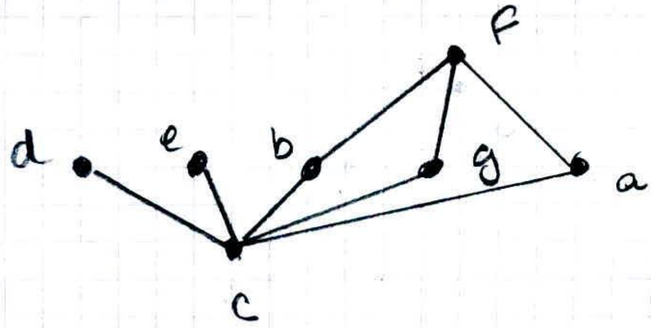
NOTA

(10) Construye, en caso de ser posible en el conj. $A = \{a,b,c,d,e,f,g\}$, una relación de orden a través de un diagrama de Hasse de modo tal que:

- "c" sea el único minimal
- carezca de máximo
- "f" sea la única cota superior del subconjunto $\{a,b,g\}$

Hay varias relaciones que pueden responder a lo pedido.





(11) Dada la relación definida en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$: $(a,b)\, R\, (c,d) \iff a|c \wedge b \leq d$

a) Demostrar que R es de orden

- $\forall (a,b) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}: a|a \wedge b \leq b \xRightarrow{\text{def. Rel.}} (a,b)\, R\, (a,b) \Rightarrow \boxed{R \text{ es Reflexiva}}$
- $\forall (a,b),(c,d) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}: (a,b)\, R\, (c,d) \wedge (c,d)\, R\, (a,b) \Rightarrow$ def. de la relación

$\Rightarrow (a|c \wedge b \leq d) \wedge (c|a \wedge d \leq b) \xRightarrow{\text{conmut}}$

$\Rightarrow (a|c \wedge c|a) \wedge (b \leq d \wedge d \leq b) \Rightarrow (a = c \wedge d = b)$

$\Rightarrow (a,b) = (c,d) \Rightarrow \boxed{R \text{ es antisimétrica}}$

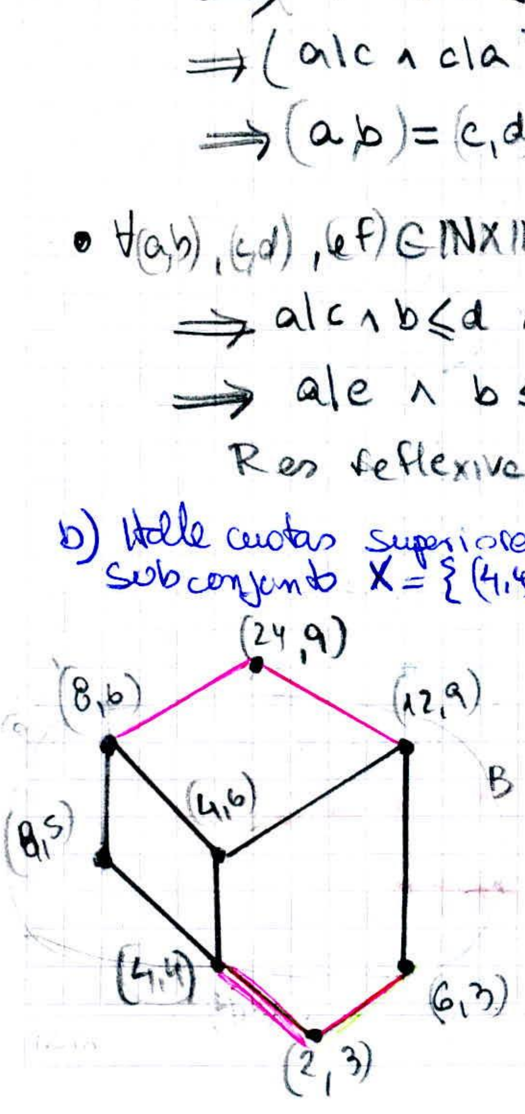
- $\forall (a,b),(c,d),(e,f) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}: (a,b)\, R\, (c,d) \wedge (c,d)\, R\, (e,f) \Rightarrow$ def relac.

$\Rightarrow a|c \wedge b \leq d \wedge c|e \wedge d \leq f \xRightarrow{\text{conmut}} (a|c \wedge c|e) \wedge (b \leq d \wedge d \leq f)$

$\Rightarrow a|e \wedge b \leq f \xRightarrow{\text{def rel}} (a,b)\, R\, (e,f) \Rightarrow \boxed{R \text{ es transitiva}}$

R es reflexiva, simétrica y transitiva $\Rightarrow$ R es de orden

b) Halle cotas superiores, cotas inferiores, supremo e ínfimo del subconjunto $X = \{(4,4),(8,6),(8,5),(4,6),(6,3),(12,9)\}$ $k \in \mathbb{N}$



Cotas sup $= \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 : x = 24k \wedge y \geq 9\}$

Supremo $= (24,9)$ (no es máximo)

Cotas inf $= \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 : x|2 \wedge y \leq 3\} =$

$= \{(2,3),(2,2),(2,1),(1,3),(1,2),(1,1)\}$

Ínfimo $= (2,3)$ (no es mínimo)

Guia 5

(12) En $\mathcal{P}(A)$ se define la relación R como: $XRY \Leftrightarrow \underbrace{\overline{X} \cap Y = \emptyset}_{Y \subseteq X}$

a) Demostrar que la relación es de orden

- $\forall X \in \mathcal{P}(A): \overline{X} \cap X = \emptyset \Rightarrow XRX \Rightarrow \boxed{R \text{ es reflexiva}}$

- $\forall X, Y \in \mathcal{P}(A): XRY \wedge YRX \xRightarrow{\text{def. rel.}} \overline{X} \cap Y = \emptyset \wedge \overline{Y} \cap X = \emptyset$

$\Rightarrow [(\overline{X} \cap Y) \cup X = \emptyset \cup X] \wedge [(\overline{Y} \cap X) \cup Y = \emptyset \cup Y] \Rightarrow$

$\xRightarrow{\text{distrib. absorbente}} [(\overline{X} \cup X) \cap (Y \cup X) = X] \wedge [(\overline{Y} \cup Y) \cap (X \cup Y) = Y] \Rightarrow$

$\xRightarrow{\text{complemento}} [\underset{\text{universo}}{\mathcal{U}} \cap (Y \cup X) = X] \wedge [\underset{\text{universo}}{\mathcal{U}} \cap (X \cup Y) = Y] \Rightarrow$

$\xRightarrow{\text{neutro}} (Y \cup X) = X \wedge (X \cup Y) = Y \xRightarrow{\text{conmut.}} X \cup Y = X \wedge X \cup Y = Y$

$\Rightarrow X = Y \Rightarrow \boxed{R \text{ es antisimétrica}}$

- $\forall X, Y, Z \in \mathcal{P}(A): XRY \wedge YRZ \xRightarrow{\text{def. Rel.}} \overline{X} \cap Y = \emptyset \wedge \overline{Y} \cap Z = \emptyset \Rightarrow$

$\Rightarrow [(\overline{X} \cap Y) \cup X = \emptyset \cup X] \wedge [(\overline{Y} \cap Z) \cup Y = \emptyset \cup Y] \Rightarrow$

$\xRightarrow{\text{distrib. y absorb.}} [(\overline{X} \cup X) \cap (Y \cup X) = X] \wedge [(\overline{Y} \cup Y) \cap (Z \cup Y) = Y] \Rightarrow$

$\xRightarrow{\text{complemento}} [\mathcal{U} \cap (Y \cup X) = X] \wedge [\mathcal{U} \cap (Z \cup Y) = Y] \Rightarrow$

$\xRightarrow{\text{neutro}} Y \cup X = X \wedge Z \cup Y = Y \Rightarrow \overline{Y \cup X} = \overline{X} \wedge \overline{Z \cup Y} = \overline{Y}$

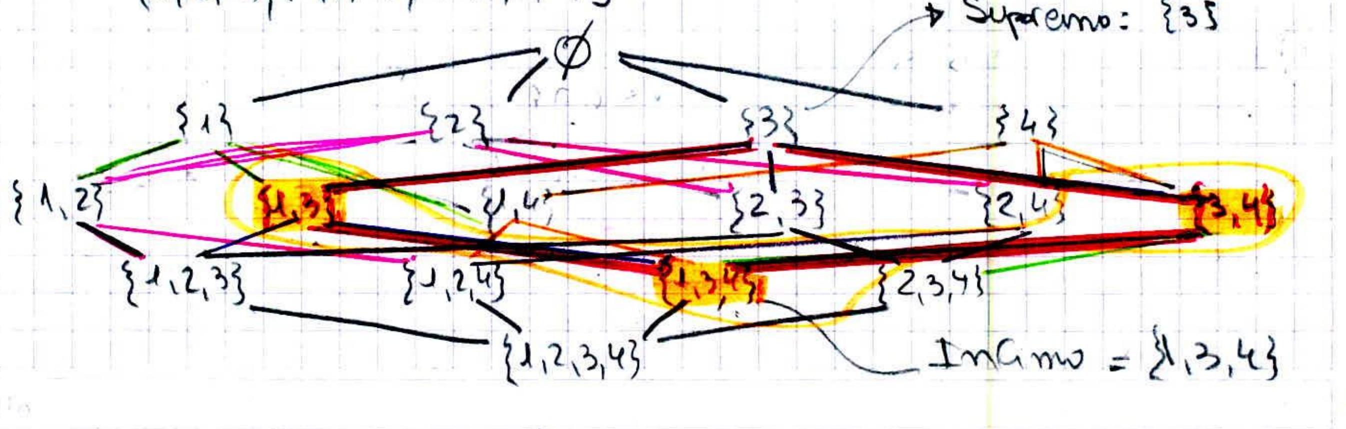
$\xRightarrow{\text{De Morgan}} \overline{Y} \cap \overline{X} = \overline{X} \wedge \overline{Z} \cap \overline{Y} = \overline{Y} \xRightarrow{\text{simpl.}} (\overline{Z} \cap \overline{Y}) \cap \overline{X} = \overline{X} \Rightarrow$

$\Rightarrow (\overline{Z} \cap \overline{Y} \cap \overline{X}) \cap Z = \overline{X} \cap Z \xRightarrow{\text{conmut.}} \overline{Z} \cap Z \cap \overline{Y} \cap \overline{X} = \overline{X} \cap Z$

$\xRightarrow{\text{absorbente}} \emptyset = \overline{X} \cap Z \xrightarrow{\text{simetría igualdad}} \overline{X} \cap Z = \emptyset \xRightarrow{\text{def. rel.}} XRZ \Rightarrow \boxed{R \text{ es transitiva}}$

b) Siendo $A = \{1,2,3,4\}$ halle el supremo y el ínfimo del subconjunto $B = \{\{1,3\}, \{1,3,4\}, \{3,4\}\}$

$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\}\}$



(13) Sea $A = \{1,2,3,4,5,6,7,14,20\}$ donde se define la relación:

$aRb \iff (a=b) \vee (p(a) < p(b))$ siendo $p(n)$ = "# letras en el nombre" (ej. $p(3) = 4$)

a) Pruebe que R es una relación de orden y haga el diagrama de Hasse de A

- $\forall a \in A: a=a \Rightarrow aRa \Rightarrow$ $\boxed{\text{R es reflexiva}}$
- $\forall a,b \in A: aRb \wedge bRa \xRightarrow{\text{def rel.}} (a=b \vee p(a) < p(b)) \wedge (b=a \vee p(b) < p(a))$

simetría de la igualdad + distributiva $\Rightarrow [(a=b) \wedge (a=b \vee p(b) < p(a))] \vee [p(a) < p(b) \wedge (a=b \vee p(b) < p(a))]$

conmut. absorción distrib. $\Rightarrow a=b \vee [(a=b \wedge p(a) < p(b)) \vee \underbrace{(p(a) < p(b) \wedge p(b) < p(a))}_{F}]$

$\Rightarrow a=b \vee (a=b \wedge p(a) < p(b)) \xRightarrow{\text{absorc}} a=b \Rightarrow$ $\boxed{\text{R es antisimétrica}}$

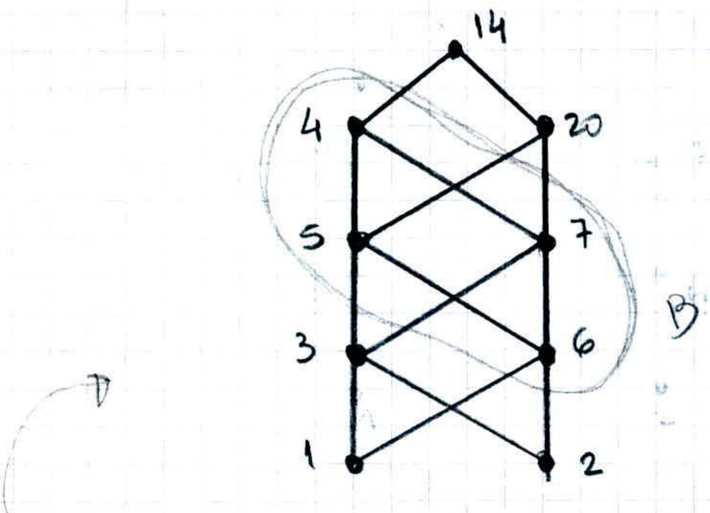
- $\forall a,b,c \in A: aRb \wedge bRc \xRightarrow{\text{def. rel.}} [a=b \vee p(a) < p(b)] \wedge [b=c \vee p(b) < p(c)]$

distrib. $\Rightarrow (a=b \wedge b=c) \vee (a=b \wedge p(b) < p(c)) \vee (p(a) < p(b) \wedge b=c) \vee (p(a) < p(b) \wedge p(b) < p(c))$

transit. de la = $\Rightarrow (a=c) \vee (p(a) < p(c)) \vee (p(a) < p(c)) \vee (p(a) < p(c)) \Rightarrow$

idemp. $\Rightarrow a=c \vee p(a) < p(c) \xRightarrow{\text{def. rel}} aRc \Rightarrow$ $\boxed{\text{R es transitiva}}$

$p(1) = 3 \quad p(2) = 3 \quad p(3) = 4 \quad p(4) = 6 \quad p(5) = 5$
$p(6) = 4 \quad p(7) = 5 \quad p(14) = 7 \quad p(20) = 6$



b) Indique cotas superiores e inferiores, supremo, ínfimo, máximo y mínimo del subconjunto $B = \{4,5,6,7\}$

cotas superiores $= \{4, 14\}$ Supremo $= 4$ Máximo $= 4$

cotas inferiores $= \{6, 2, 1\}$ Ínfimo $= 6$ Mínimo $= 6$

GUÍA 5

(14) Sea el conjunto ordenado $(\mathbb{R}; \leq)$ y $A = \{x / x = \frac{3n}{n+1}$ con $n \in \mathbb{N}\}$

a) Halle algunos elementos del conjunto A. Compruebe que es un subconjunto de $\mathbb{R}$

$A = \{1{,}5 \,;\, 2 \,;\, 2{,}25 \,;\, 2{,}4 \,;\, 2{,}5 \,;\, \ldots\}$ $\quad A \subseteq \mathbb{R}$

b) Halle cotas sup. e inferiores de A, supremo e ínfimo, e indique si existen máximo y mínimo.

$\lim\limits_{n \to \infty} \frac{3n}{n+1} = \frac{\infty}{\infty}$ indeterminación $\rightarrow$ uso L'Hopital

$\lim\limits_{n \to \infty} \frac{3n}{n+1} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{n \to \infty} \frac{3}{1} = 3$

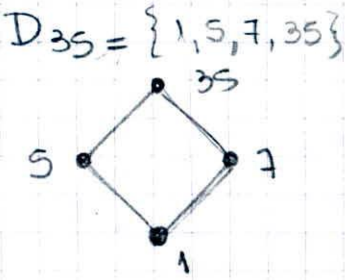
cotas superiores $= \{x \mid x \geq 3\}$ $\quad$ supremo $= 3$ $\quad$ máximo $= \nexists$

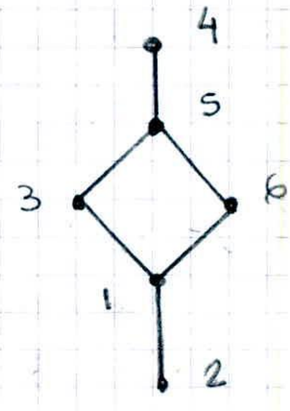
cotas inferiores $= \{x \mid x \leq 1{,}5\}$ $\quad$ ínfimo $= 1{,}5$ $\quad$ mínimo $= 1{,}5$

(15) Sea el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Hacer el diagrama de Hasse de una relación de orden $\leq$ sabiendo que 2 es el primer elemento, las cotas superiores de $\{3, 5, 6\}$ son $\{5, 4\}$, hay un único maximal y el subconjunto $\{1, 3, 5, 6\}$ es isomorfo a $(D_{35}; |)$. Indicar si es orden total

$D_{35} = \{1, 5, 7, 35\}$





(16) Indicar si las sig. proposiciones son V o F, justificando

a) La relación R definida en $\mathbb{Z}$ tal que $x R y \Leftrightarrow |x| \leq |y|$ es de orden

$\boxed{F}$ $-3 R 3 \wedge 3 R -3$ pero $3 \neq -3$ (no es antisimétrica

b) Si un conj está bien ordenado entonces está totalmente ordenado

$\boxed{V}$ Está explicado en la pág 119 de la guía teórica

c) Si un conjunto está totalmente ordenado entonces está bien ordenado

$\boxed{F}$ Contraejemplo $(\mathbb{Z}; \leq) \rightarrow$ No tiene 1° elemento

d) Si $(A;\leq)$ es un conj. finito y totalmente ordenado entonces cualquier subconjunto tiene mínimo

$\boxed{V}$ Si es Totalmente ordenado y es un conj finito $\Rightarrow$ tiene un 1° elemento $\Rightarrow$ todo subconjunto también lo tendrá cualquiera

e) Si m es minimal del conjunto ordenado $(A;\leq) \Rightarrow$ m es maximal de $(A;\leq^{-1})$ $\boxed{V}$

f) $(D_{32};|)$ es un conjunto bien ordenado $\boxed{V}$

$D_{32} = \{1,2,4,8,16,32\}$

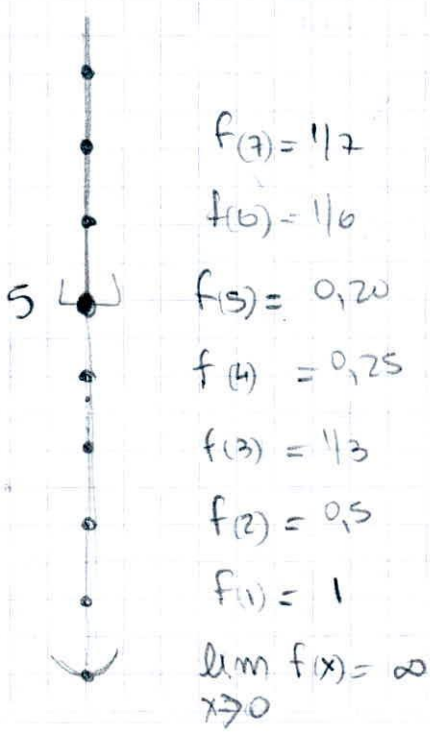
---

(17) Dada la relación S definida en dom(f): $x\,S\,y \iff f(x) \geq f(y)$

a) Demostrar que si f es cualquier función inyectiva, entonces S es de orden

- $\forall x \in dom(f): f(x) = f(x) \Rightarrow xSx \Rightarrow \boxed{S \text{ es reflexiva}}$
- $\forall x,y \in dom(f): xSy \wedge ySx \xrightarrow{\text{def rel}} f(x) \geq f(y) \wedge f(y) \geq f(x)$
  $\Rightarrow f(x) = f(y) \xrightarrow{\text{x ser inyectiva}} x = y \Rightarrow \boxed{S \text{ es antisimétrica}}$
- $\forall x,y,z \in dom(f): xSy \wedge ySz \xrightarrow{\text{def rel}} f(x) \geq f(y) \wedge f(y) \geq f(z)$
  $\xrightarrow{\text{x transitividad}} f(x) \geq f(z) \Rightarrow xSz \Rightarrow \boxed{S \text{ es transitiva}}$

b) Considerando $f(x) = 1/x$ hallar las cotas inferiores de $x=5$



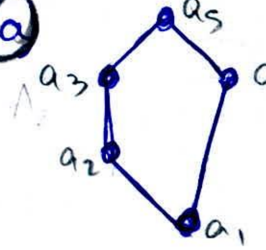
Cotas inferiores $= \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \in (0,5]\}$

GUIA 5	Redes	M.D. 8

III REDES

(18) Indique cuáles de los sig. conjuntos finitos ordenados dados por su diagrama de Hasse, es una red. Justifique:

a)



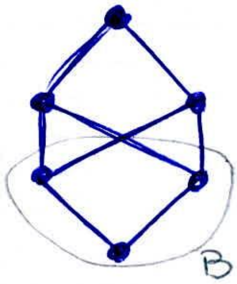
tiene 1° elemento
tiene último elemento

Los pares incomparables son (a_2, a_4) y (a_3, a_4)

Ambos pares tienen supremos

Es Red

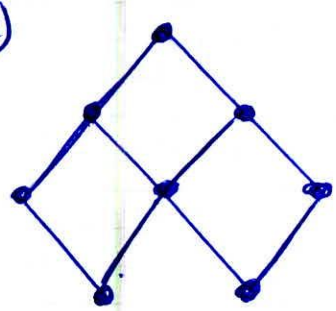
b)



El subconjunto B No tiene supremo

No es red

c)

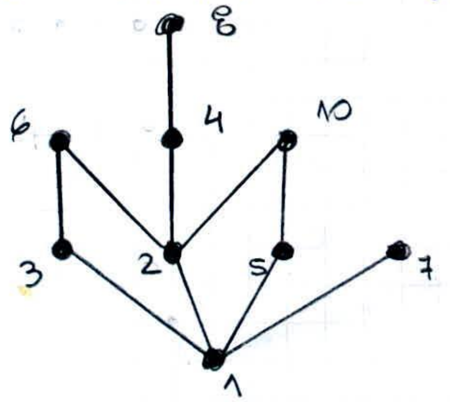


No tiene 1° elemento
No es red

---

(19) Indique cuáles de los sig. conjuntos ordenados es una red. Justificar.

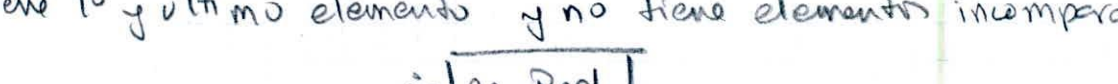
a) $(\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}; \mid)$



No tiene último elemento

↳ No es red

b) $(\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}; \leq)$

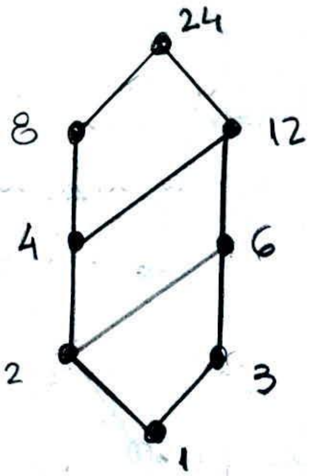


tiene 1° y último elemento y no tiene elementos incomparables

∴ es Red

c) $(D_{24} ; |)$

$D_{24} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$



- tiene 1° y último elemento ✓

Busco si los elementos incomparables tienen supremo e ínfimo

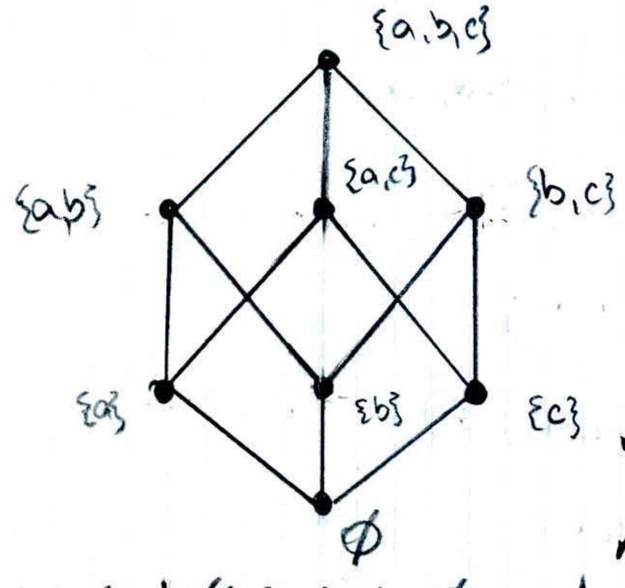
	mcm	mcd	
2 y 3:	$2 \vee 3 = 6$	$, 2 \wedge 3 = 1$	✓
4 y 3:	$4 \vee 3 = 12$	$, 4 \wedge 3 = 1$	✓
8 y 3:	$8 \vee 3 = 24$	$, 8 \wedge 3 = 1$	✓
4 y 6:	$4 \vee 6 = 24$	$, 4 \wedge 6 = 2$	✓
8 y 6:	$8 \vee 6 = 24$	$, 8 \wedge 6 = 2$	✓
8 y 12:	$8 \vee 12 = 24$	$, 8 \wedge 12 = 4$	✓

- todos los elementos incomparables tienen ínfimo y supremo

ES RED

d) $(P(\{a,b,c\}) ; \subseteq)$

$P(\{a,b,c\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\})$



- tiene 1° elemento: $\emptyset$ ✓
- tiene último elem: $\{a,b,c\}$ ✓

Analizo si los elementos incomparables tienen supremo e ínfimo:

✓ $\begin{cases} \{a\} \wedge \{b\} = \{a,b\} \\ \{a\} \vee \{b\} = \emptyset \end{cases}$

✓ $\begin{cases} \{a\} \wedge \{c\} = \{a,c\} \\ \{a\} \vee \{c\} = \emptyset \end{cases}$

✓ $\begin{cases} \{b\} \wedge \{c\} = \{b,c\} \\ \{b\} \vee \{c\} = \emptyset \end{cases}$

✓ $\begin{cases} \{a,b\} \wedge \{a,c\} = \{a,b,c\} \\ \{a,b\} \vee \{a,c\} = \{a\} \end{cases}$

✓ $\begin{cases} \{a,b\} \wedge \{b,c\} = \{a,b,c\} \\ \{a,b\} \vee \{b,c\} = \{b\} \end{cases}$

✓ $\begin{cases} \{a,c\} \wedge \{b,c\} = \{a,b,c\} \\ \{a,c\} \vee \{b,c\} = \{c\} \end{cases}$

✓ $\begin{cases} \{a\} \wedge \{b,c\} = \emptyset \\ \{a\} \vee \{a,c\} = \{a,b,c\} \end{cases}$

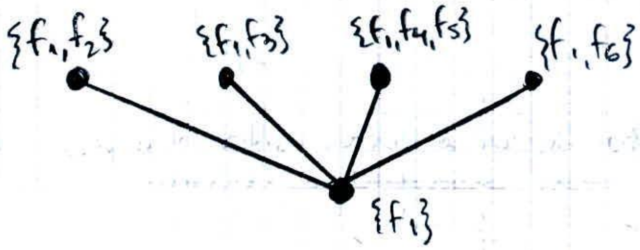
✓ $\begin{cases} \{b\} \wedge \{a,c\} = \emptyset \\ \{b\} \vee \{a,c\} = \{a,b,c\} \end{cases}$

✓ $\begin{cases} \{c\} \wedge \{a,b\} = \emptyset \\ \{c\} \vee \{a,b\} = \{a,b,c\} \end{cases}$

- Todos los elementos incomparables tienen supremo e ínfimo

ES RED

e) $(\{\{f_1\}, \{f_1,f_2\}, \{f_1,f_3\}, \{f_1,f_4,f_5\}, \{f_1,f_6\}\}; \subseteq)$



No tiene último elemento

NO es RED

f) $(\mathbb{N}; |)$

No se puede mostrar por diagrama de Hasse pues $\mathbb{N}$ es un conjunto infinito, pero $\forall a,b \in \mathbb{N}$, $\exists$ mcd(a,b) y mcm(a,b)

ES RED

g) $(\mathbb{Z}; \leq)$

No se puede hacer diagrama de Hasse pues $\mathbb{Z}$ es un conjunto infinito, pero $\forall$ subconjunto de $\mathbb{Z}$ $\exists$ ínfimo y supremo en $\mathbb{Z}$?

ES RED

(20) Para las redes del ejercicio anterior, indique las operaciones que las estructuran como redes algebraicas.

19.b) $(\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}; \max; \min)$

19.c) $(D_{24}; \text{mcm}; \text{mcd})$

19.d) $(P(\{a,b,c\}); \cup; \cap)$

19.f) $(\mathbb{N}; \text{mcm}; \text{mcd})$

19.g) $(\mathbb{Z}; \max; \min)$

(21) Indicar V o F, justificando:

a) todo conjunto ordenado finito con primer y último elemento es red.

$\boxed{F}$ Ver ejercicio 18.b)

b) Toda red es un conjunto totalmente ordenado.

$\boxed{F}$ Ver ej-18 a). Es red y no es tto.

c) Todo conjunto bien ordenado es red.

$\boxed{V}$ todo conj. bien ordenado no tiene elementos incomparables y $\forall$ par de elementos, todos tienen supremo e ínfimo

d) En toda red: $x \preccurlyeq y \Longleftrightarrow \sup\{x,y\} = y$

$\boxed{V}$ Es parte de la definición de red: $x \preccurlyeq y \Leftrightarrow x \vee y = y \wedge x \wedge y = x$

---

(22) En el conj. de las funciones reales $F = \{f: D_f \to I_f \,/\, D_f \subseteq \mathbb{R}\}$ se define la relación $f S g \Longleftrightarrow I_f \subseteq I_g$

a) Indicar si S es una rel. de orden en F, justif. correctamente.

- Reflexiva: $\forall f \in F: I_f \subseteq I_f \xRightarrow{\text{def. Rel}} f S f \Rightarrow \boxed{S \text{ es Reflexiva}}$
- Antisimétrica: No se cumple. Contraejemplo: $f(x) = x$, $g(x) = -x$

$f(x) = x$, $g(x) = -x \rightarrow I_f = \mathbb{R}$, $I_g = \mathbb{R} \Rightarrow I_f \subseteq I_g$ pero $f(x) \neq g(x)$

b) Considerando el subconjunto $A = \{f, g, h, s, t, m\}$ con $f(x) = 3x+2$, $g(x) = 1/x$, $h(x) = x^4 - 5$, $s(x) = e^x$, $t(x) = \sqrt{7+6x-x^2}$, $m(x) = \underbrace{\text{arcsen}(x-5)}_{-1 \leq x-5 \leq 1}$

Construir el diagrama de Hasse e indicar si (A, S) es red. Justificar.

$I_f = \mathbb{R}$

$I_g = \mathbb{R} - \{0\}$

$I_h \in [-5, +\infty)$

$I_s \in \mathbb{R}_{>0}$

$I_t \in [0, 4]$

$I_m \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

- $7 + 6x - x^2 \geqslant 0$

$-(x^2 - 6x - 7) \geqslant 0$

$-[(x-3)^2 - 16] \geqslant 0$

$-(x-3)^2 + 16 \geqslant 0$

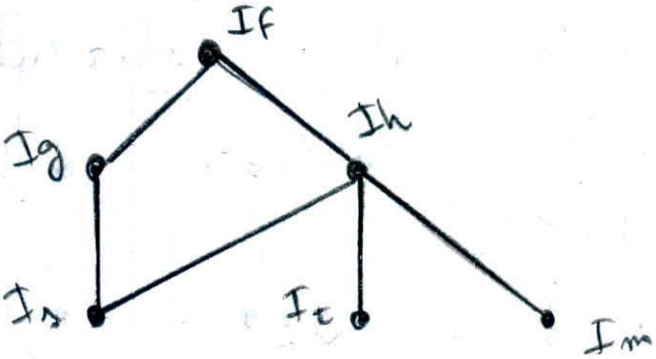
$16 \geqslant (x-3)^2$

$\underbrace{4 \geqslant |x-3|}$

$\underbrace{-1 \leq x \leq 7}$

$0 \leq \sqrt{7+6x-x^2} \leq 4$

con $x = 3$ se tiene el valor max.



No es RED pues no tiene 1° elemento

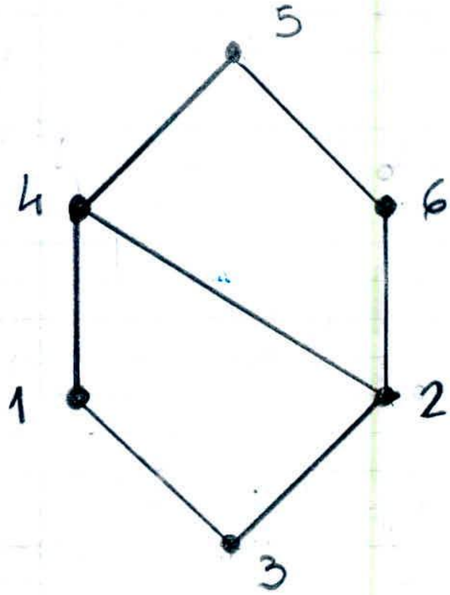
Guia 5

(23) Sabiendo que $(A ; + ; \bullet)$ es una red algebraica, se pide:

a) Completar la tabla de la operación +, haga el diagrama de Hasse y la tabla de $\bullet$

sup ✓

+	1	2	3	4	5	6
1	1	4	1	4	5	5
2	4	2	2	4	5	6
3	1	2	3	4	5	6
4	4	4	4	4	5	5
5	5	5	5	5	5	5
6	5	6	6	5	5	6



inf $\wedge$

$\bullet$	1	2	3	4	5	6
1	1	3	3	1	1	3
2	3	2	3	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3
4	1	2	3	4	4	2
5	1	2	3	4	5	6
6	3	2	3	2	6	6

b) Indique si la red es distributiva y si es complementada.

0_A 1_A

$\bar{3} = 5$
$\bar{5} = 3$

$\bar{1} = 6$
$\bar{6} = 1$

$\bar{2} = \nexists$
$\bar{4} = \nexists$

No es complementada

$\vee$ sup

$\wedge$ inf

Distributividad: $a \vee (b \wedge c) \overset{?}{=} (a \vee b) \wedge (a \vee c)$
$a \wedge (b \vee c) \overset{?}{=} (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

✓ $\begin{cases} 1 \vee (2 \wedge 3) = 1 \vee 3 = 1 \\ (1 \vee 2) \wedge (1 \vee 3) = 4 \wedge 1 = 1 \end{cases}$ | ✓ $\begin{cases} 4 \vee (5 \wedge 6) = 4 \vee 6 = 5 \\ (4 \vee 5) \wedge (4 \vee 6) = 5 \wedge 5 = 5 \end{cases}$

✓ $\begin{cases} 1 \vee (2 \wedge 4) = 1 \vee 2 = 4 \\ (1 \vee 2) \wedge (1 \vee 4) = 4 \wedge 4 = 4 \end{cases}$ | ✓ $\begin{cases} 2 \vee (3 \wedge 4) = 2 \vee 3 = 2 \\ (2 \vee 3) \wedge (2 \vee 4) = 2 \wedge 4 = 2 \end{cases}$

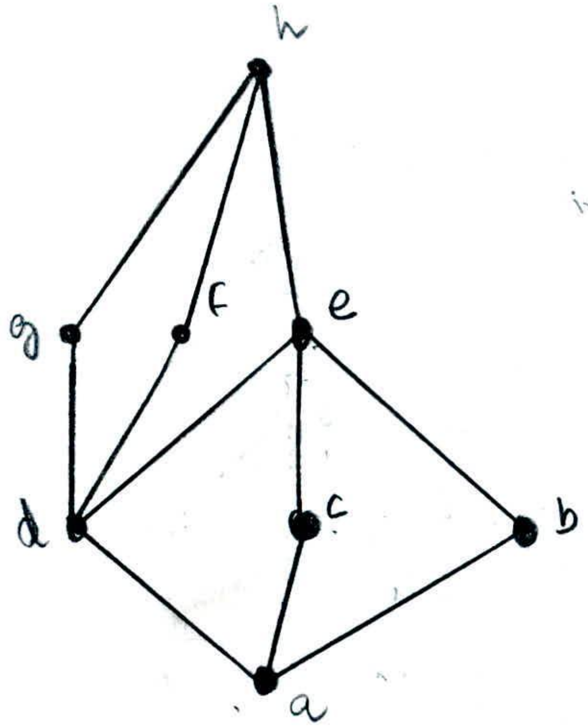
✓ $\begin{cases} 1 \vee (5 \wedge 6) = 1 \vee 6 = 5 \\ (1 \vee 5) \wedge (1 \vee 6) = 5 \wedge 5 = 5 \end{cases}$ | ✓ $\begin{cases} 3 \vee (4 \wedge 5) = 3 \vee 4 = 4 \\ (3 \vee 4) \wedge (3 \vee 5) = 4 \wedge 5 = 4 \end{cases}$

...

y así hay que hacer con todas las combinaciones ... es distributiva

(24) Sabiendo que $(A;+;\bullet)$ es una red algebraica, se pide:

a) Completar la tabla de la operación $+$, hacer el diagrama de Hasse y la tabla de $\bullet$



1° escribo en la diag. las letras (idempotencia)

2° absorbente ⇒ h

3° neutro: a

4° simetría

ínfimo

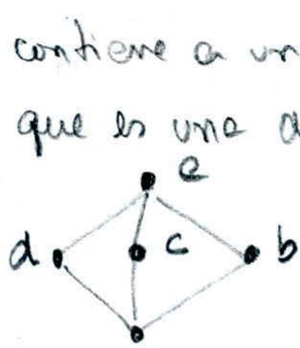
supremo

+	a	b	c	d	e	f	g	h
a	a	b	c	d	e	f	g	h
b	b	b	e	e	e	h	h	h
c	c	e	c	e	e	h	h	h
d	d	e	e	d	e	f	g	h
e	e	e	e	e	e	h	h	h
f	f	h	h	f	h	f	h	h
g	g	h	h	g	h	h	g	h
h	h	h	h	h	h	h	h	h

$\bullet$	a	b	c	d	e	f	g	h
a	a	a	a	a	a	a	a	a
b	a	b	a	a	b	a	a	b
c	a	a	c	a	c	a	a	c
d	a	a	a	d	d	d	d	d
e	a	b	c	d	e	d	d	e
f	a	a	a	d	d	f	d	f
g	a	a	a	d	d	d	g	g
h	a	b	c	d	e	f	g	h

b) Indique si la red es distributiva y si es complementada

No es distributiva pues contiene a una subred que es una de las 2 no distr.



Complementos:

$\bar{a} = h$

$\bar{h} = a$

$\bar{b} = \{g, f\}$

$\bar{g} = \{b, f\}$

$\bar{f} = \{g, b\}$

?) $\bar{c} = \{g, f\}$

$\bar{d} = \nexists$

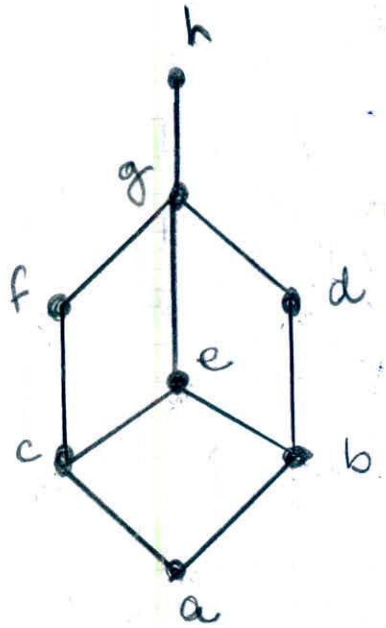
$\bar{e} = \nexists$

No es complementada

(25) Sea la red $(A = \{a,b,c,d,e,f,g,h\};+;\bullet)$ siendo:

+	a	b	c	d	e	f	g	h
a	a	b	c	d	e	f	g	h
b	b	b	e	d	e	g	g	h
c	c	e	c	g	e	f	g	h
d	d	d	g	d	g	g	g	h
e	e	e	e	g	e	g	g	h
f	f	g	f	g	g	f	g	h
g	g	g	g	g	g	g	g	h
h	h	h	h	h	h	h	h	h

a) Completar la tabla de +, hacer la de • y el diagrama de Hasse de la Relación de orden.



•	a	b	c	d	e	f	g	h
a	a	a	a	a	a	a	a	a
b	a	b	a	b	b	a	b	b
c	a	a	c	a	c	c	c	c
d	a	b	a	d	b	a	d	d
e	a	b	c	b	e	c	e	e
f	a	a	c	a	c	f	f	f
g	a	b	c	d	e	f	g	g
h	a	b	c	d	e	f	g	h

b) Analizar si la red dada es distributiva y complementada

$\bar{a} = h$

$\bar{h} = a$

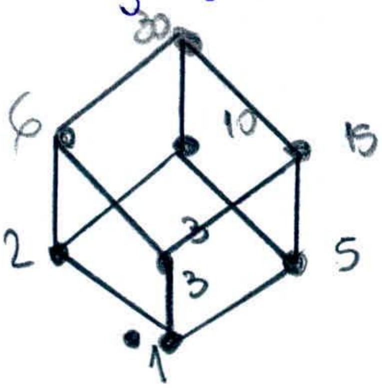
$\bar{g} = \nexists$ $\boxed{\text{No es complementada}}$

$$\left.\begin{aligned} &\bullet\ f \bullet (d+e) = f \bullet g = f \\ &\bullet\ (f \bullet d) + (f \bullet e) = a + c = c \end{aligned}\right\} \neq$$

$\boxed{\text{No es distributiva}}$

c) Analizar si es isomorfa a $(D_{30}; \mid)$. Justificar.

$\to D_{30} = \{1,2,3,5,6,10,15,30\}$



No es isomorfa con D_{30}. Se observa en la forma del diagrama de Hasse, que tienen distinta estructura.

IV ALGEBRAS DE BOOLE

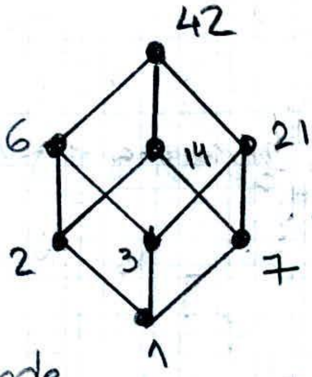
(26) Analice cuáles de las sig. redes son Álgebras de Boole:

a) $(D_{18} ; \subseteq)$

$D_{18} = \{1,2,3,6,9,18\}$ ninguno es conjunto — No es álgebra de Boole

b) $(D_{42} ; mcm ; mcd)$

$D_{42} = \{1,2,3,6,7,14,21,42\}$



$\boxed{\underbrace{(D_m ; |)}_{\equiv (D_m ; mcm ; mcd)} \text{ es álgebra de Boole} \Leftrightarrow m \text{ es producto de factores primos distintos}}$

$\overline{1} = 42$
$\overline{42} = 1$

$\overline{7} = 6$
$\overline{6} = 7$

$\overline{2} = 21$
$\overline{21} = 2$

$\overline{3} = 14$
$\overline{14} = 3$

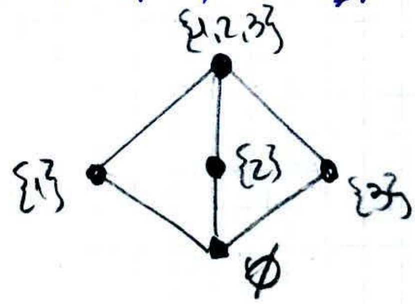
$42 = 2 \times 3 \times 7 \Rightarrow$ es álgebra de Boole

$\boxed{\text{ES red complementada}}$

c) $(P(A) ; \cup ; \cap)$

ES álgebra de Boole

d) $(\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2,3\}\} ; \subseteq)$



→ es uno de los dos diagramas que indican que NO es distributiva

NO es Álgebra de Boole

e) $(\{0,1\}^{m \times n} ; \vee ; \wedge)$

ES álgebra de Boole

Guia 5

(27) Sea la red $(D_{70}; |)$

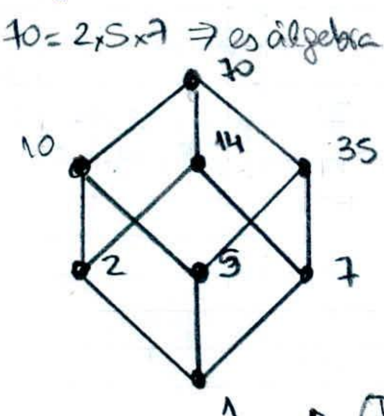
a) Defina las operaciones binarias que la estructuran como red algebraica

$(D_{70}; mcm; mcd)$ $\quad a+b = mcm(a,b)$
$\quad a \bullet b = mcd(a,b)$

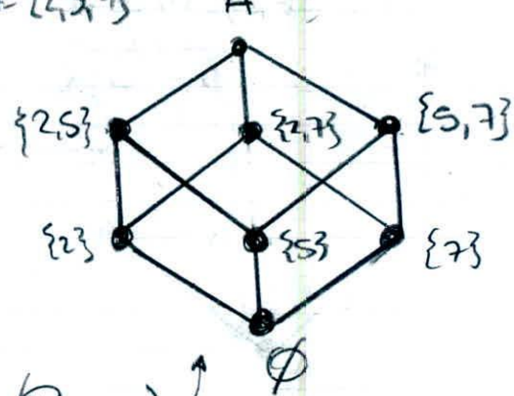
b) Si $(D_{70}; |)$ es Álgebra de Boole, indique el conjunto A de los átomos y defina un isomorfismo con $(P(A); \subseteq)$

70	2
35	5
7	7
1	

$\to 70 = 2 \times 5 \times 7 \Rightarrow$ es álgebra de Boole : $A = \{2, 5, 7\}$



$(D_{70}; |)$



$(P(A); \subseteq)$

$f_{(1)} = \emptyset$ $\qquad f_{(10)} = \{2,5\}$

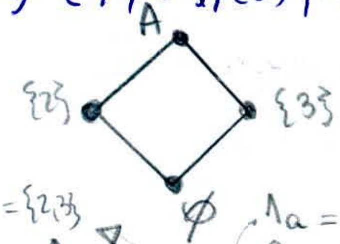
$f_{(2)} = \{2\}$ $\qquad f_{(14)} = \{2,7\}$

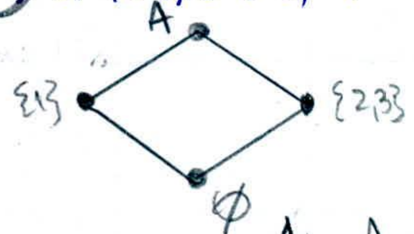
$f_{(5)} = \{5\}$ $\qquad f_{(35)} = \{5,7\}$

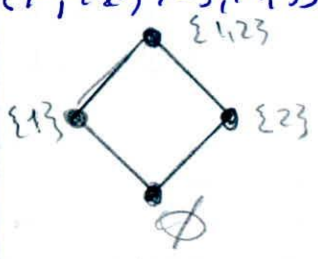
$f_{(7)} = \{7\}$ $\qquad f_{(70)} = A$

(28) Considere la siguiente Álgebra de Boole: $(P(A); \subseteq)$ con $A = \{1,2,3\}$
Indique cuáles de los sig. subconjuntos son subálgebras de Boole de $P(A)$.

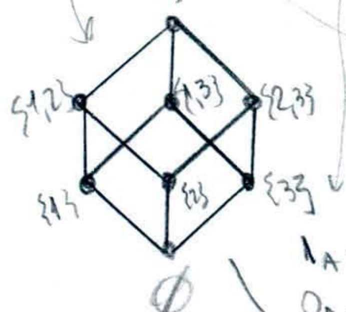
a) $\{\emptyset, \{2\}, \{3\}, A\}$ $\qquad$ b) $\{\emptyset, \{1\}, \{2,3\}, A\}$ $\qquad$ c) $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$







$\{2\} \vee \{3\} = \{2,3\}$



$1_a = A$ ✓
$0_a = \emptyset$ ✓

$\{2\} \vee \{3\} = A \neq \{2,3\}$

$1_A = A$
$0_A = \emptyset$

$1_b = A = 1_A$ ✓
$0_b = \emptyset = 0_A$ ✓

$\{1\} \vee \{2,3\} = A$
$\{1\} \wedge \{2,3\} = \emptyset$

$\{1\} \vee \{2,3\} = A$
$\{1\} \wedge \{2,3\} = \emptyset$

es igual

$\emptyset \wedge$ cualquiera $= \emptyset$
$A \vee$ cualquiera $= A$

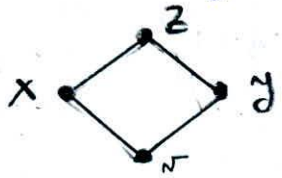
es subálgebra de Boole

$0_c = \emptyset$
$1_c = \{1,2\} \neq A$

No es subálgebra de Boole

29) Indique el valor de verdad de las sig. proposiciones en toda Álgebra de Boole $(A; \vee; \wedge)$, demostrando o justificando según corresponda:

a) $\forall x,y,z \in A: x \vee y = x \vee z \Rightarrow y = z$ $\boxed{F}$



$x \vee y = z$
$x \vee z = z$ > pero $y \neq z$

b) $\forall a,b \in A: a \preceq b \wedge a \preceq \bar{b} \Rightarrow a = 0_A$ $\boxed{V}$

hip1: $a \preceq b \Rightarrow a \wedge b = a$

hip2: $a \preceq \bar{b} \Rightarrow a \wedge \bar{b} = a$

Dem: $\forall a,b \in A: a \overset{hip2}{=} a \wedge \bar{b} \overset{hip1}{=} (a \wedge b) \wedge \bar{b} \overset{asociat}{=} a \wedge (b \wedge \bar{b}) =$

$\overset{def. complemento}{=} a \wedge 0_A = 0_A$

$0_A = 1^{o}$ elemento

c) $\forall x,y \in A: (x \wedge y = y \Leftrightarrow x \wedge \bar{y} = 0_A)$ $\boxed{V}$

d) $\forall a,b \in A: \underbrace{b \vee \bar{a} = 1_A}_{hip} \Rightarrow a \wedge [b \vee (\bar{a} \wedge \bar{b})] = a$ $\boxed{V}$

dem: $\forall a,b \in A: a \wedge [b \vee (\bar{a} \wedge \bar{b})] \overset{distrib.}{\Longrightarrow} a \wedge [(b \vee \bar{a}) \wedge (b \vee \bar{b})]$

$\overset{hipótesis}{\Longrightarrow} a \wedge [1_A \wedge (b \vee \bar{b})] \overset{complemento}{\Longrightarrow} a \wedge [1_A \wedge 1_A] \Longrightarrow$

$\overset{idempotencia}{\Longrightarrow} a \wedge 1_A \overset{último\ elem}{\Longrightarrow} \boxed{a}$

e) $\forall a,b,c \in A: (a \wedge b) \vee c = a \wedge (b \vee c) \Leftrightarrow c \preceq a$ $\boxed{V}$

Es un álgebra de Boole ⇒ es distributiva. $c \vee a = a$ y $c \wedge a = c$

dem ① $\Rightarrow \boxed{(a \wedge b) \vee c} \overset{distrib}{\Rightarrow} (a \vee c) \wedge (b \vee c) \overset{conmut.}{\Longrightarrow} (c \vee a) \wedge (b \vee c) \overset{hip}{\Rightarrow} a \wedge (b \vee c)$ ✓

dem ② $\Rightarrow c \vee a \Longrightarrow$ ¿?

Guia 5

f) $\forall x,y \in A: (x \vee y) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y}) = 1_A$ $\boxed{V}$

$\forall x,y \in A: (x \vee y) \wedge (\bar{x} \wedge \bar{y}) \overset{\text{de Morgan}}{\Longleftrightarrow} (x \vee y) \wedge (\overline{x \vee y}) \Longleftrightarrow 1_A$

def. complemento

g) toda álgebra de Boole es una red totalmente ordenada $\boxed{F}$

$(D_{70};|) \rightarrow$ ej. 27 $\rightarrow$ es álgebra de Boole pero no es TTO pues tiene 14 y 35 dos elementos incomparables

h) Puede haber elementos que sean complemento de sí mismos $\boxed{F}$

x complemento: $\left.\begin{array}{l} a \vee \bar{a} = 0_A \\ a \wedge \bar{a} = 1_A \end{array}\right\} \rightarrow$ si $a = \bar{a} \Rightarrow 0_A = 1_A$

i) Si A es álgebra de Boole entonces su cardinal es 2^n $\boxed{V}$

Es una de las propiedades del Álgebra de Boole (pág 140 de la guía teórica)

j) Si una red con un número 2^n de elementos entonces A es un álgebra de Boole $\boxed{F}$

El ejercicio 25 tiene 8 elementos (2^3) pero no es un álgebra de Boole

---

30) En toda Álgebra de Boole $(A;+;\cdot)$, si $\underbrace{a\cdot\bar{b} \leq c}_{\text{hip 1}} \wedge \underbrace{a+c = 1_A}_{\text{hip 2}}$ se cumple:

a) $\bar{a} = c$ b) $\bar{c} \leq b$ c) $a \leq c \wedge \bar{b} \leq c$ d) $c = 1_A$

Dem: $a\cdot\bar{b} \leq c \overset{\text{hip 1}}{\Longrightarrow} a\cdot\bar{b} + c = c \overset{\text{distrib.}}{\Longrightarrow} (a+c)\cdot(\bar{b}+c) = c$

$\overset{\text{hip 2}}{\Longrightarrow} 1_A \cdot (\bar{b}+c) = c \overset{\text{elem absorbente}}{\Longrightarrow} \bar{b}+c = c \overset{\text{complemento}}{\Longrightarrow} \overline{\bar{b}+c} = \bar{c}$

$\overset{\text{De Morgan}}{\Longrightarrow} \bar{\bar{b}} \cdot \bar{c} = \bar{c} \overset{\text{involuc.}}{\Longrightarrow} b\cdot\bar{c} = \bar{c} \overset{\text{def. rel. orden}}{\Longrightarrow} \boxed{\bar{c} \leq b}$

que es la respuesta b)

V - FUNCIONES BOOLEANAS

(31) Para las sig. funciones booleanas de $\{0,1\}^3 \to \{0,1\}$:

$$f(x,y,z) = (\overline{z+y} + \bar{x}) \cdot \bar{z} + y$$

$$g(x,y,z) = x \cdot \overline{z+y} + \bar{x} \cdot \bar{y}$$

Se pide:

a) Construya la tabla de cada una.
b) Escriba a cada una como FND y en FNC
c) Simplifique la expresión de c/u de las funciones

$$f(xyz) = (\overline{z+y}+\bar{x})\bar{z} + y \overset{\text{De Morgan}}{=} (\bar{z}.\bar{y}+\bar{x})\bar{z}+y \overset{\text{distrib}}{=} \bar{z}\bar{y}\bar{z} + \bar{x}\bar{z} + y \overset{\text{idemp.}}{=} \boxed{\bar{y}\bar{z} + \bar{x}\bar{z} + y = f(xyz)}$$

$$g(xyz) = x.\overline{z+y} + \bar{x}.\bar{y} = \boxed{x.\bar{z}.\bar{y} + \bar{x}\bar{y} = g(xyz)}$$

a)

FNC	f	x	y	z	g	FNC
$\bar{x}\bar{z} + \bar{y}\bar{z}$	1	0	0	0	1	$\bar{x}\bar{y}$
	0	0	0	1	1	$\bar{x}\bar{y}$
$\bar{x}\bar{z} + y$	1	0	1	0	0	
y	1	0	1	1	0	
$\bar{y}\bar{z}$	1	1	0	0	1	$x\bar{y}\bar{z}$
	0	1	0	1	0	
y	1	1	1	0	0	
y	1	1	1	1	0	

FND FND

b) FND (las construyo observando la tabla)

$f(xyz) = \bar{x}\bar{y}\bar{z} + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}yz + x\bar{y}\bar{z} + xy\bar{z} + xyz$ ✓

$g(xyz) = \bar{x}\bar{y}\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z}$ ✓

FNC: $f(xyz) = (x+y+\bar{z})(\bar{x}+y+\bar{z})$

$g(xyz) = (x+\bar{y}+z)(x+\bar{y}+\bar{z})(\bar{x}+y+\bar{z})(\bar{x}+\bar{y}+z)(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})$

c) $f(xyz) = \bar{y}\bar{z} + \bar{x}\bar{z} + y \overset{\text{distrib}}{=} \boxed{(\bar{y}+\bar{x})\bar{z} + y = f(xyz)}$ ✓

$g(xyz) = x\bar{z}\bar{y} + \bar{x}\bar{y} \overset{\text{distr.}}{=} (x\bar{z}+\bar{x})\bar{y} \overset{\text{distr.}}{=} [\underbrace{(x+\bar{x})}_{1}(\bar{x}+\bar{z})]\bar{y} =$

$= \boxed{(\bar{x}+\bar{z})\bar{y} = g(xyz)}$ ✓

GUIAS

(32) Dada la función booleana: $f(xyz) = \bar{x}.y.(z+x) + (\overline{z+y} + x).\bar{z}.y + x.z$

a) Escribir dicha función en forma normal disyuntiva, utilizando leyes de Álgebra de Boole.
(Siempre usar compuertas binarias, excepto NOT) → para el b

distributiva y conmut

$f(xyz) = \bar{x}y(z+x) + (\overline{z+y} + x)\bar{z}\,y + xz =$

De Morgan y conmut

$= \bar{x}yz + \underbrace{\bar{x}x}_{0}y + (\overline{z+y}.\bar{z}y) + xy\bar{z} + xz =$

distrib

$= \bar{x}yz + \bar{z}.\underbrace{\bar{y}.y}_{0}\bar{z} + xy\bar{z} + x(y+\bar{y})z =$

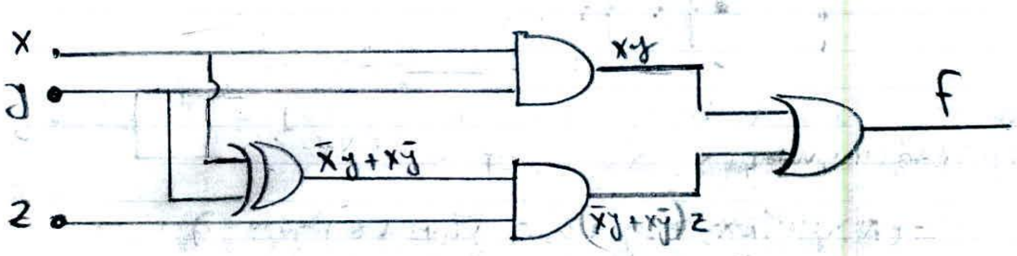
$= \boxed{\bar{x}yz + xy\bar{z} + xyz + x\bar{y}z = f(xyz)}$ en FND ✓

b) Diseñar un circuito con la menor cantidad de compuertas para implementar la función dada.

conmut + distrib

$f(xyz) = \bar{x}yz + xy\bar{z} + xyz + x\bar{y}z = \bar{x}yz + x\bar{y}z + xy(\underbrace{\bar{z}+z}_{1}) =$

distrib. $= \underbrace{(\bar{x}y + x\bar{y})}_{XOR}z + xy = f(xyz)$



33) Indicar V o F justificando:

a) La FND de la función booleana $f(xyz) = x\cdot y + \bar{y}$ consta de 5 minitérminos

$$f(xyz) = xy + \bar{y} = xy(z+\bar{z}) + (x+\bar{x})\bar{y}(z+\bar{z}) =$$

$$= \underbrace{xyz + xy\bar{z} + x\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}\bar{z}}_{\text{6 minitérminos}} = f(xyz)$$

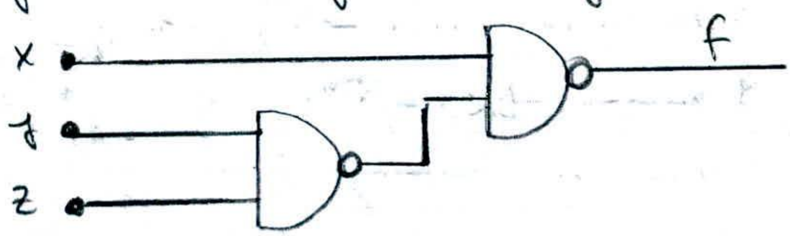
$\boxed{F}$

b) La función booleana $f(xyz) = (\bar{x}+y+\bar{z})\cdot\overline{x\cdot\bar{z}}$ puede implementarse con un circuito formado solamente por dos compuertas NAND

$$f(xyz) = (\bar{x}+y+\bar{z})\,\overline{x\bar{z}} \overset{\text{De Morgan + involución}}{=} (\bar{x}+y+\bar{z})(\bar{x}+z) \overset{\text{distrib.}}{=} (\bar{x}+y+\bar{z})\bar{x} + (\bar{x}+y+\bar{z})z =$$

$$\overset{\text{absorción}}{=} \bar{x} + (\bar{x}+y+\bar{z})z \overset{\text{distrib}}{=} \bar{x} + \bar{x}z + yz + \underbrace{\bar{z}z}_{0} \overset{\text{absorción}}{=} \bar{x} + yz =$$

$$\overset{\text{doble complemento}}{=} \overline{\overline{\bar{x}+yz}} \overset{\text{De Morgan}}{=} \overline{\bar{\bar{x}}\cdot\overline{yz}} \overset{\text{involuc.}}{=} \overline{x\cdot\overline{yz}}$$



$\boxed{V}$

c) La forma Normal Conjuntiva de $f(xyzwt) = (w+\bar{z})x + (y+\bar{z})$ tiene 4 maxitérminos.

$$f(xyzw) = (w+\bar{z})x + (y+\bar{z}) \overset{\text{distrib}}{=} (w+\bar{z}+y+\bar{z})(x+y+\bar{z}) \overset{\text{conmut involución}}{=}$$

$$= (y+\bar{z}+w)(x+y+\bar{z}) = ((x\bar{x})+(y+\bar{z}+w))(x+y+\bar{z}+(w\bar{w})) =$$

$$= (x+y+\bar{z}+w)(\bar{x}+y+\bar{z}+w)(x+y+\bar{z}+w)(x+y+\bar{z}+\bar{w}) =$$

$$\overset{\text{idempot.}}{=} (x+y+\bar{z}+w)(\bar{x}+y+\bar{z}+w)(x+y+\bar{z}+\bar{w}) \rightarrow \text{tiene 3 max.}$$

$\boxed{F}$

d) Es posible implementar con una única compuerta la función booleana

$$f(xyz) = \overline{x\cdot\bar{y}+z} + \overline{\bar{y}+z} = \overline{x\cdot\bar{y}}\cdot\bar{z} + \bar{y}\cdot\bar{z} = (\bar{x}+y)\bar{z} + \bar{y}\bar{z} =$$

$$= \underbrace{(\bar{x}+y+\bar{y})}_{1}\bar{z} = \bar{z}$$

GUIA 5

e) La forma Normal Disyuntiva de la función booleana f tiene 5 minitérminos.

$$f(x y z, t) = x \cdot y \cdot (\overline{z+t} + z) \overset{\text{De Morgan}}{=} xy\,(\bar{z}\cdot\bar{t} + z) \overset{\text{distrib.}}{=} xy\bar{z}\bar{t} + xyz =$$

$$= xy\bar{z}\bar{t} + xyzt + xyz\bar{t} \rightarrow 3 \text{ términos}$$

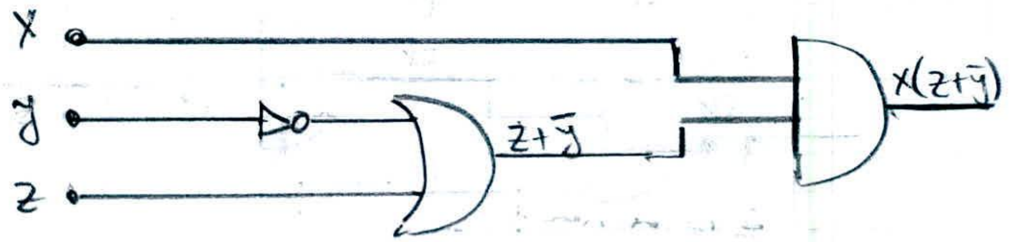
$\boxed{F}$

f) La función booleana $f(xyz) = xz + \bar{y} \cdot \overline{z+\bar{x}}$ puede ser implementada en un circuito formado solamente por una compuerta AND, una OR y una NOT.

$$f(xyz) = xz + \bar{y} \cdot \overline{z+\bar{x}} \overset{\text{De Morgan}}{=} xz + \bar{y} \cdot \bar{z} \cdot \bar{\bar{x}} \overset{\text{involución y conmut.}}{=} xz + x\bar{y}\bar{z} =$$

$$\overset{\text{distrib.}}{=} x(z + \bar{y}\bar{z}) \overset{\text{distrib.}}{=} x(z+\bar{y})\underbrace{(z+\bar{z})}_{1} = x(z+\bar{y})$$

$\boxed{V}$



34) Se tiene un compuesto para analizar en laboratorio. Si el compuesto tiene sustancia Z debe rechazarse. Si tiene sustancia X solo se aceptará si también posee sustancia Y. En el resto de los casos no hay problema de aceptarla.

a) Defina una función booleana f(xyz) a través de una tabla que detecte los rechazos (debe valer 0 si se rechaza y 1 si se acepta) y escriba FND de f

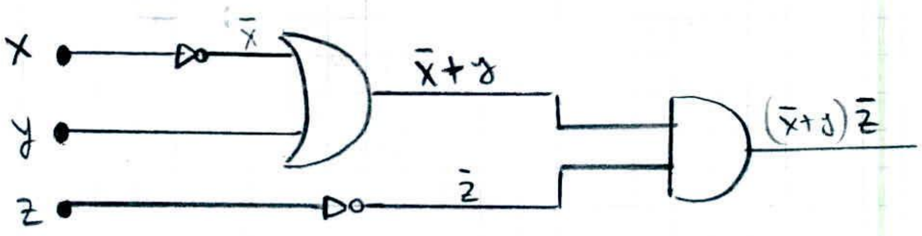
X	Y	Z	F
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

$$f(xyz) = \bar{x}\bar{y}\bar{z} + \bar{x}y\bar{z} + xy\bar{z}$$

b) Simplifique a su mínima expresión y construya el circuito con compuertas AND, OR y NOT

$$f(xyz) = \bar{x}\bar{y}\bar{z} + \bar{x}y\bar{z} + xy\bar{z} \overset{\text{distrib.}}{=} \bar{x}\bar{y}\bar{z} + \overbrace{(\bar{x}+x)}^{1}(y\bar{z}) =$$

$$= \bar{x}\bar{y}\bar{z} + y\bar{z} \overset{\text{distr.}}{=} (\bar{x}\bar{y} + y)\,\bar{z} \overset{\text{distr.}}{=} (\bar{x}+y)(\bar{y}+y)\,\bar{z} = (\bar{x}+y)\bar{z}$$



(35) Se tiene una caja con papelitos de un solo color, algunos rojos y otros azules. Cada persona extrae 3 papelitos en orden. Para ganar el premio, los 3 papelitos deben ser del mismo color o bien el segundo rojo y el tercero azul (sin importar el primero).

a) Representar la situación mediante la tabla de una función booleana que valga 1 cuando gana el premio (para las entradas usar: 0 para el rojo y 1 para el azul)

1°	2°	3°	f
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

0 : rojo
1 : azul

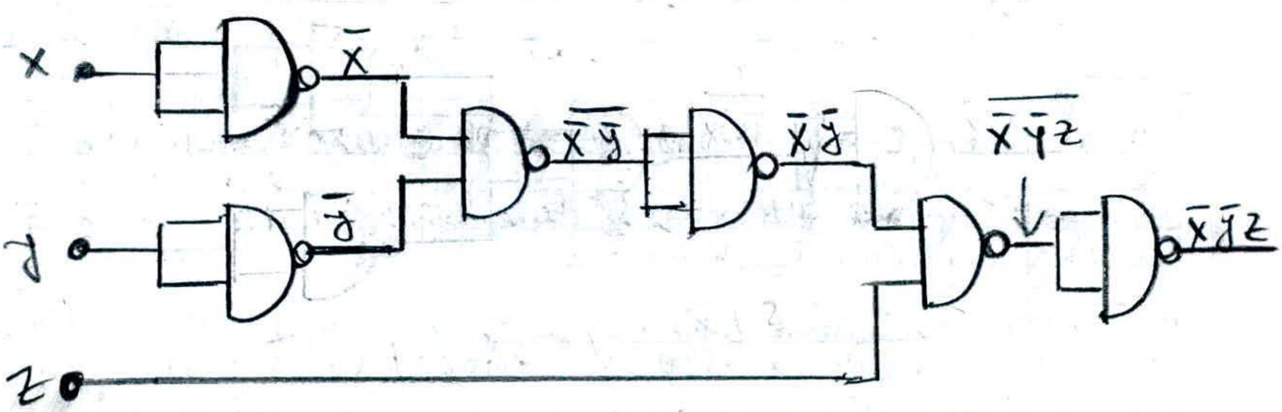
1° : x
2° : y
3° : z

$$f(xyz) = \bar{x}\bar{y}\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z + x\bar{y}z + xyz$$

b) Simplificar la expresión y diseñar un circuito combinatorio usando solamente compuertas NAND

$$f(xyz) = \bar{x}\bar{y}\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z + x\bar{y}z + xyz \overset{\text{distrib}}{=} \bar{x}\bar{y}\overbrace{(\bar{z}+z)}^{1} + xz\overbrace{(\bar{y}+y)}^{1} =$$

$$= \bar{x}\bar{y} + xz = \underbrace{\bar{x}x}_{0}\bar{y} + \bar{x}\bar{y}z = \bar{x}\bar{y}z$$



GUIAS

(36) De un grupo de 5 personas: Ana, Beto, Carmen, Daniel, Elba, en la sig. tabla, se muestra los idiomas que habla cada persona.

persona \ idioma	francés	inglés	alemán	portugués	Polaco
Ana	X		X	X	
Beto			X		
Carmen	X	X			
Daniel		X			X
Elba		X	X	X	

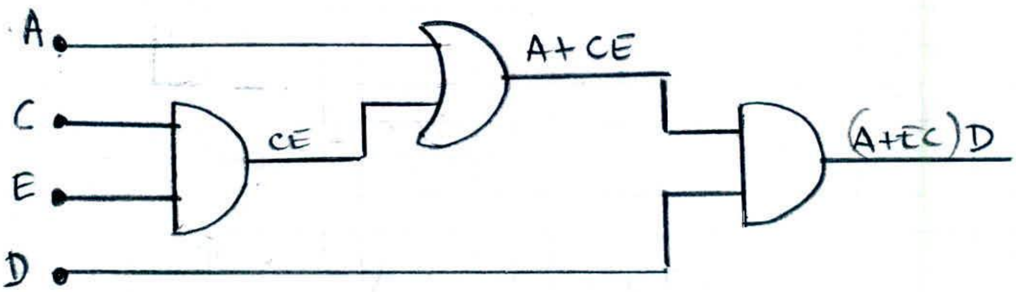
a) Armar una función booleana que contemple la necesidad de contar por lo menos con un traductor de cada idioma y armar el circuito usando la menor cantidad de compuertas binarias AND, OR

$f_{(A,B,C,D,E)} = (A+C)(C+D+E)(A+B+E)(A+E).D =$

$\overset{\text{conmut}}{=} (C+A)(C+D+E)(A+E)(A+E+B)\,D =$

$\overset{\text{absorción}}{=} (C+A)(C+D+E)(A+E)\,D \overset{\text{conmut}}{=} (A+E)(A+C)\left[D\,(D+C+E)\right] =$

$\overset{\text{absorción}}{=} (A+E)(A+C)\,D \overset{\text{distr.}}{=} \left[A+(E.C)\right].D$



b) Indicar la cantidad de maxitérminos que tiene la forma normal conjuntiva (no hace falta anotarlos todos, pero sí explicar cómo se calcula)

A	E	C
0	0	0
0	0	1
0	1	0
0	1	1
1	0	0
1	0	1
1	1	0
1	1	1

Los maxitérminos se dan cuando $f=0$. Son 5 variables $\Rightarrow$ 32 combinaciones posibles.

8

en 16 $D=1$
en 16 $D=0$

f se hace 0 cuando: $D=0 \vee [A=0 \wedge (E=0 \vee C=0)]$

de los 16 en que $D=1 \rightarrow$ 8 comb. tienen a $A=0$

$16 + 6 = 22$ maxitérminos

6 comb. hacen que $A+EC=0$

(37) En una industria colocaron una alarma contra incendios que debe programarse de acuerdo a lo que marquen 4 sensores A, B, C y D.

Si el detector de llamas A está encendido la alarma debe dispararse independientemente de lo que indiquen los demás.

Pero si el A está apagado, solamente debe dispararse la alarma si están encendidos el B y al menos uno de los dos C o D.

Se pide:

a) Construya la tabla de la función booleana que modeliza esta situación.

A	B	C	D	F
1	1	1	1	1
1	1	1	0	1
1	1	0	1	1
1	1	0	0	1
1	0	1	1	1
1	0	1	0	1
1	0	0	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	1	1
0	1	1	0	1
0	1	0	1	1
0	1	0	0	0
0	0	1	1	0
0	0	1	0	0
0	0	0	1	0
0	0	0	0	0

b) Halle la expresión más simple de dicha función booleana.

$$f_{(ABCD)} = (A+\bar{B}+C+D)(A+B+\bar{C}+\bar{D})(A+B+\bar{C}+D)(A+B+C+\bar{D})(A+B+C+D) =$$

distrib $= A + (\bar{B}+C+D)(B+\bar{C}+\bar{D})(B+\bar{C}+D)(B+C+\bar{D})(B+C+D) =$

conmut $= A + [(\bar{B}+C+D)(B+C+D)(B+\bar{C}+\bar{D})(B+\bar{C}+D)(B+C+\bar{D})] =$

distrib $= A + [(\underbrace{\bar{B}B}_{0}) + (C+D)][(B+\bar{C}) + (\underbrace{\bar{D}D}_{0})](B+C+\bar{D}) =$

$= A + (C+D)(B+\bar{C})(B+C+\bar{D}) =$

distrib $= A + (C+D)[B + (\bar{C}(C+\bar{D}))] =$

$= A + (C+D)[B + \underbrace{\bar{C}.C}_{0} + \bar{C}\bar{D}] = A + (C+D)(B+\bar{C}\bar{D}) =$

distrib $= A + B(C+D) + (C+D)(\bar{C}\bar{D}) =$

De Morgan $= A + B(C+D) + \underbrace{(C+D)(\overline{C+D})}_{0} = \boxed{A + B(C+D) = f}$

$$\boxed{f_{(ABCD)} = A + B(C+D)}$$

c) Diseñe un circuito de compuertas.